

I. megoldás. Nevezük a 3×3 -as kocka sarokkockáit A , az élek közepénél elhelyezkedő kockákat B , a lapok középpontjainál levő kockákat C kockáknak.

Ha az egér egy A kockában van, akkor a következő lépéssel biztosan B kockába kerül. B kockából $1/2$ valószínűséggel A , $1/2$ valószínűséggel pedig C kockába kerül. C kockából $4/5$ valószínűséggel lép B kockába, $1/5$ valószínűséggel pedig megtalálja a sajtot.

Ahhoz, hogy az egér C kockába kerüljön, biztosan páros sok lépésre van szükség, mivel ide B kockából lehet csak lépni, és az egér az 1. lépésben B kockába kerül, és innentől kezdve (amíg meg nem találja a sajtot) minden 2. lépésben B kockába kerül. A 3×3 -as kocka közepébe C kockából lehet lépni, így ehhez páratlan sok, és legalább 3 lépésre van szükség. Az 1. lépés után az egér B kockában van. Vizsgáljuk meg, mekkora valószínűséggel találja meg 2 lépés múlva a sajtot. Először C -be, majd a kocka középpontjába kell lépnie, a fentiek szerint ennek valószínűsége

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}.$$

Ha az egér nem találta meg a sajtot, akkor 2 lépés után ismét B -ben van, ennek valószínűsége tehát

$$1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

A lépésszám várható értéke ezek alapján:

$$\begin{aligned} & 3 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} + 7 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot \frac{1}{10} + 9 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} + \dots = \\ &= \frac{1}{10} \left(3 + 5 \cdot \frac{9}{10} + 7 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{10} \left[3 \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots \right) + 2 \left(\frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots \right) + \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \dots \right) + 2 \left(\left(\frac{9}{10}\right)^3 + \left(\frac{9}{10}\right)^4 + \dots \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

A q hányadosú végtelen mértani sor összegképlete: $\frac{a_1}{1-q}$. Így

$$1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 10.$$

Így a keresett várható érték:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{10} \left[3 \cdot 10 + 2 \cdot \left(\frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \left(\frac{9}{10}\right)^3 + \dots \right) \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots \right) \right] = \\ &= \frac{1}{10} \left[3 \cdot 10 + 2 \cdot \left(\frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots \right) \cdot 10 \right] = \\ &= 3 + 2 \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \dots \right) \cdot \frac{9}{10} = 3 + 2 \cdot 10 \cdot \frac{9}{10} = 21. \end{aligned}$$

II. megoldás. A középső egységkockához való eljutásig szükséges átlagos lépésszámot jelölje k , ha sarokkockából; l , ha élközépkockából; és m , ha lapközépkockából indulunk – feltéve, hogy ezek az átlagértékek valóban léteznek.

Mivel az egér sarokkockából indul, így a feladat k meghatározása.

Szomszédos kockáknak azokat tekintjük, amelyek rendelkeznek közös lappal. Sarokkockából indulva egy lépés után mindenképpen élközépkockához jutunk, így:

$$(1) \quad k = 1 + l.$$

Élközépkockából továbblépve $1/2$ valószínűséggel jutunk ismét sarokkockába, illetve $1/2$ valószínűséggel lapközépkockába:

$$(2) \quad l = 1 + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2}m.$$

Ha lapközépkockába kerülünk, onnan $4/5$ valószínűséggel juthatunk élközépkockába:

$$(3) \qquad m = 1 + \frac{4}{5}l.$$

Az (1)-ben k -ra és (3)-ban m -re kapott kifejezést (2)-be helyettesítve kapjuk, hogy:

$$l = 1 + \frac{1}{2}(1 + l) + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4}{5}l \right),$$

amiből $l = 20$ és így $k = 21$.