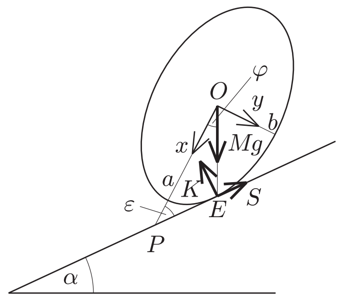
I. megoldás. Ha a súrlódás elegendően nagy, az erők egyensúlyának feltétele biztosan teljesülhet, így elegendő a forgatónyomatékok egyensúlyát vizsgálni.



Használjuk az *ábrán* látható jelöléseket! A lejtő által az M tömegű hengerre kifejtett nyomóerő

$$K = Mg\cos\alpha,$$

a súrlódási erő

$$S = Mg\sin\alpha,$$

így az erők O pontra vonatkoztatott forgatónyomatékának egyensúlyi feltétele:

$$K\cdot OE\cdot\sin\left(90^\circ-\varepsilon-\varphi\right) = S\cdot OE\cdot\sin\left(\varepsilon+\varphi\right).$$

(Kihasználtuk, hogy az OEP háromszög E-nél levő külső szöge a másik két belső szög, ε és φ összege.) Az egyensúlyi feltétel $Mg\cdot OE$-vel való egyszerűsítés után így írható:

$$\cos\alpha\cdot\cos\left(\varepsilon+\varphi\right) = \sin\alpha\cdot\sin\left(\varepsilon+\varphi\right),\quad \text{azaz}\quad \operatorname{tg}\left(\varepsilon+\varphi\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

(Ez az összefüggés úgy is megkapható, hogy felírjuk az erők eredő forgatónyomatékát az E pontra vonatkoztatva. Ez az eredő akkor lesz nulla, ha az Mg gravitációs erő hatásvonala átmegy az E ponton, tehát OE függőleges, így a K nyomóerő α szöget zár be a függőlegessel, azaz $\varphi+\varepsilon = 90^\circ-\alpha$.)

Az ábrán látható koordináta-rendszerben az ellipszishez az E pontban húzott érintő meredeksége:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y},$$

ahol x és y az E pont koordinátái a fenti koordináta-rendszerben. Ez a képlet megtalálható pl. a Függvénytáblázat 74. oldalán, vagy levezethető az ellipszis egyenletéből, miszerint

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = \frac{\left(x+\Delta x\right)^2}{a^2}+\frac{\left(y+\Delta y\right)^2}{b^2} = 1.$$

Mivel $m = -\operatorname{tg}\varepsilon$, másrészt

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi},$$

fennáll a

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$$

összefüggés. A forgatónyomatékok egyensúlyának feltétele ezek után

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left(\varepsilon+\varphi\right) = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varepsilon\cdot\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}+\operatorname{tg}\varphi}{1-\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\cdot\operatorname{tg}\varphi} =$$

$$= \frac{1}{1-\frac{b^2}{a^2}}\left(\operatorname{tg}\varphi+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\right)$$

alakba írható. Alkalmazzuk a zárójelben álló kifejezésre a számtani-mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\operatorname{tg}\varphi+\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} \ge 2\sqrt{\operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}} = 2\frac{b}{a},$$

ahonnan a lejtő szögére az

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \geq \frac{1}{1-\frac{b^2}{a^2}} \cdot 2 \cdot \frac{b}{a} = \frac{2ba}{a^2-b^2}$$

feltételt kapjuk. Az ellipszishenger tehát legfeljebb

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a^2-b^2}{2ab}$$

hajlásszögű lejtőn maradhat egyensúlyban.

II. megoldás. Az előző megoldás jelöléseit követve abból a feltételből, hogy egyensúlyban a henger tömegközéppontja, valamint a henger és a lejtő érintkezési pontja ugyanazon a függőleges egyenesen kell elhelyezkedjék, eljuthatunk a

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{1-\frac{b^2}{a^2}}\left(\operatorname{tg}\varphi + \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}\right)$$

egyenletig. Ez $\operatorname{tg}\varphi$-re nézve másodfokú egyenlet:

$$\operatorname{tg}^2\varphi - \frac{1}{1-\frac{b^2}{a^2}}\,\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\cdot\operatorname{tg}\varphi + \frac{b^2}{a^2} = 0,$$

amelynek (nem túl meredek lejtő esetén) 2 gyöke van. Ezek egyike a henger stabil, a másik pedig az instabil egyensúly helyzetét adja meg.

Ha a lejtő hajlásszögét növeljük, a két egyensúlyi helyzetnek megfelelő $\varphi_{1,2}$ szög közeledik egymáshoz, egy bizonyos α_0 szögnél meredekebb lejtők esetén pedig egyáltalán nem találunk egyensúlyi megoldást. A kritikus hajlásszöget az a feltétel határozza meg, hogy a másodfokú egyenletnek már csak 1 megoldása legyen. Ez akkor következik be, amikor az egyenlet diszkriminánsa nullává válik, vagyis amikor teljesül

$$\left(\frac{1}{1-\frac{b^2}{a^2}}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_0}\right)^2 = \frac{4b^2}{a^2}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{a^2-b^2}{2ab}.$$