Megoldás. Jelöljük a kiindulási állapotot 0-s állapotnak, az a helyzet, amikor a dugattyú éppen hozzáér a rugó végéhez legyen az 1. állapot, és a végállapotra mint 2. állapotra hivatkozunk. A megadott és a keresett fizikai mennyiségeket ennek a jelölésnek megfelelő indexekkel látjuk el, tehát pl. a végállapot 18 dm^3-es térfogatát (a kitűzési szöveggel ellentétben) V_2-vel fogjuk jelölni!

Számoljuk ki az egyes állapotokhoz tartozó nyomást, térfogatot, a dugattyú elmozdulását és az eltelt időt! Ezek ismeretében (a hőtan első főtételét is felhasználva) meghatározhatjuk a gáz belső energiájának változását, a gázon végzett munkát, majd a közölt hőt, illetve a hőleadás teljesítményét.

Kezdőállapotban a héliumgáz nyomása a légköri nyomás és a dugattyú súlyából származó nyomás összege:

$$p = p_0 + \frac{mg}{A} = 10^5\ \text{Pa} + \frac{0{,}02\ \text{kg} \cdot 10\ \text{m/s}^2}{2 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^2} \approx p_0.$$

(A dugattyú súlyából származó nyomás elhanyagolható a légköri nyomás mellett!) A gáz térfogata

$$V_0 = 0{,}008\ \text{m}^3.$$

Az 1. állapothoz tartozó térfogat:

$$V_1 = V_0 + Ad = 0{,}012\ \text{m}^3,$$

a nyomás az 1. állapotban (és a $0 \to 1$ folyamat során mindvégig) $p_1 = p_0$. A megadott sebességgel mozgó dugattyú

$$t_1 = \frac{d}{v_0} = 4\ \text{s}$$

idő alatt ér az 1. állapotba.

A 2. állapotban a gáz térfogata $V_2 = 0{,}018\ \text{m}^3$, a dugattyú tehát az 1. állapothoz képest

$$\Delta\ell = \frac{V_2 - V_1}{A} = 0{,}3\ \text{m}$$

távolságnyit el kellett mozduljon, ennyivel nyomta össze a rugót. Ebben az állapotban a rugó által kifejtett erő $D \cdot \Delta\ell$, a gáz nyomása tehát

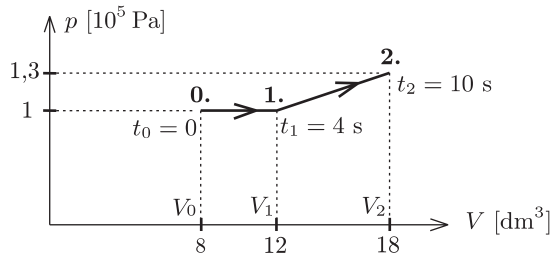
$$p_2 = p_1 + \frac{D \cdot \Delta\ell}{A} = 1{,}3 \cdot 10^5\ \text{Pa}.$$

A dugattyú

$$\Delta t = \frac{\Delta\ell}{v_0} = 6\ \text{s}$$

idő alatt ér az 1. állapotból a gáz 2. állapotának megfelelő helyzetbe, ez tehát az indítást követő 10. másodpercben következik be.

A kiszámított adatok felhasználásával ábrázolhatjuk a héliumgáz állapotváltozását $p{-}V$ diagramon. A $0 \to 1$ folyamat izobár, az $1 \to 2$ folyamat során pedig a nyomás a dugattyú elmozdulásával arányosan növekszik, tehát az állapotváltozást a $p{-}V$ diagramon egyenes szakasz szemlélteti (*1. ábra*). Az ábrán a jellegzetes időpontokat is feltüntettük. A dugattyú egyenletes sebességgel mozog, emiatt a gáz térfogata az idővel egyenes arányban változik.



1. ábra

A termodinamika első főtétele szerint a gázzal közölt Q hő, a gáz belső energiájának ΔE megváltozása és a gáz által végzett $p\Delta V$ munka között fennáll a

$$Q = \Delta E + p\Delta V$$

összefüggés. Ez a kapcsolat a fenti formában csak kicsiny változásokra érvényes, a gáz teljes állapotváltozása során felvett (vagy leadott) hőt a kicsiny változások járulékainak összegzésével kaphatjuk meg. A gáz belső energiáját az

$$E = \frac{f}{2}pV$$

állapotegyenletből kaphatjuk meg, ahol f a gázmolekulák szabadsági fokainak száma, héliumra $f = 3$. A gáz munkavégzését a teljes folyamatra (vagy annak bármely részére) a $p - V$ diagramon a „görbe alatti területből” olvashatjuk le.

Ezen általános megfontolásokat a jelen feladat $0 \to 1$ szakaszára alkalmazva a fűtőszál által közölt hőre

$$Q_{0\to 1} = \frac{3}{2}p_0(V_1 - V_0) + p_0(V_1 - V_0) = 1000\ \mathrm{J}$$

adódik. Mivel ez a hőátadás időben egyenletesen történt, a fűtőszál pillanatnyi teljesítménye időben állandó és az átlagteljesítménnyel egyezik meg:

$$P(t) = \overline{P}_{0\to 1} = \frac{Q_{0\to 1}}{t_1} = \frac{1000\ \mathrm{J}}{4\ \mathrm{s}} = 250\ \mathrm{W}.$$

Hasonló módon számolható a folyamat második felében közölt hő is:

$$Q_{1\to 2} = \frac{3}{2}(p_2V_2 + p_0V_1) + \frac{1}{2}(p_2 + p_0)(V_2 - V_1) = 2400\ \mathrm{J}.$$

Az átlagos fűtőteljesítmény ebben a szakaszban

$$\overline{P}_{1\to 2} = \frac{Q_{1\to 2}}{t_2 - t_1} = 400\ \mathrm{W},$$

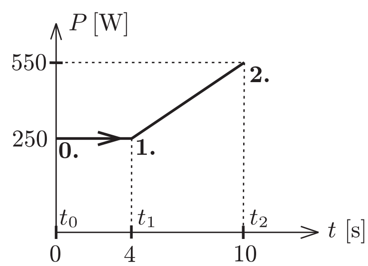
de a pillanatnyi teljesítmény itt már *nem állandó,* hanem időben *egyenletesen* változva növekszik. Ezt úgy láthatjuk be, hogy meggondoljuk: a gáz által időegységenként felvett hő

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{3}{2}\frac{\Delta(pV)}{\Delta t} + \frac{p\Delta V}{\Delta t} = \frac{5}{2}p\frac{\Delta V}{\Delta t} + \frac{3}{2}V\frac{\Delta p}{\Delta t}.$$

Tekintve, hogy a gáz térfogata is és a nyomása is az idővel arányosan nő, a $\frac{\Delta V}{\Delta t}$ és $\frac{\Delta p}{\Delta t}$ hányadosok időben nem változnak, az őket szorzó p, illetve V mennyiségek viszont időben egyenletesen nőnek, tehát a pillanatnyi fűtőteljesítmény egész kifejezésének is időben egyenletesen kell növekednie. Kezdetben (az 1. állapotban) a fűtőteljesítmény a korábbi 250 W-tal egyezik meg, átlagértéke – mint láttuk – 400 W, a legnagyobb értéke tehát (a 2. állapotban) 550 W kell legyen.

A pillanatnyi fűtőteljesítményt az idő függvényében a *2. ábra* mutatja. Ennek görbe alatti területéből ugyancsak leolvasható, hogy a fűtőszál által közölt teljes hő:

1000 Ws + 2400 Ws = 3400 J.



2. ábra