

Megoldás. Tekintsünk egy 2 sorból és $t + m$ oszlopból álló üres táblázatot. Nézzük a táblázat azon kitöltéseit, amelyek kielégítik az alábbi feltételeket:

- Minden mezőbe vagy egy 1 , vagy egy 0 számjegy kerül;
- A felső sor első t mezőjébe 1 -es kerül;
- Ha bárhol a felső sorban egy 0 áll, akkor közvetlenül alatta is 0 van;
- Az alsó sorban pontosan m darab 1 -es van.

A feladat állításának bizonyításához megmutatjuk, hogy mindkét kifejezés a megfelelő kitöltések számát határozza meg.

Hogyan kaphatunk egy helyes kitöltést?

I. módszer: A felső sor utolsó m mezőjébe pontosan k helyre 1 -es kerüljön, a többi helyre 0 ($0 \leq k \leq m$). Ezt k függvényében $\binom{m}{k}$ -féleképpen tehetjük meg. Ebben a sorban ekkor pontosan $t + k$ darab 1 -es van. Az alsó sor m darab 1 -ese csak a felső sor $t + k$ darab 1 -ese alá kerülhet, nekik $\binom{t+k}{m}$ -féleképpen választhatunk helyet. A többi helyre 0 kerül.

Ez adott k esetén $\binom{m}{k} \binom{t+k}{m}$ kitöltést jelent, összesen

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{t+k}{m}$$

helyes kitöltést, ami a bizonyítandó egyenlőség bal oldalán található kifejezés.

II. módszer: Az alsó sor m darab 1 -ese közül k darabot ($0 \leq k \leq m$) az első t oszlopba rakunk, ezt k függvényében $\binom{t}{k}$ -féleképpen tehetjük meg.

Az alsó sor utolsó m mezőjébe pontosan $m - k$ darab 1 -es kerül, nekik $\binom{m}{m-k} = \binom{m}{k}$ -féleképpen adhatunk helyet.

Az alsó sort k függvényében $\binom{t}{k} \binom{m}{k}$ -féleképpen tölthetjük ki, a felső sor utolsó m mezője viszont még üres.

Közülük pontosan $m - k$ mező alatt az alsó sorban 1 -es áll, így ebben az $m - k$ mezőben is biztosan 1 -esek állnak. A többi, $m - (m - k) = k$ darab üres mezőt szabadon, összesen 2^k -féleképpen tölthetjük ki.

A k függvényében így $\binom{m}{k} \binom{t}{k} \cdot 2^k$ darab kitöltés létezik, ez összesen

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{t}{k} \cdot 2^k$$

helyes kitöltést jelent. Ez pedig a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán található kifejezés.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. A fentitől különböző megoldás található Hajnal Péter: *Elemi kombinatorikai feladatok* c. könyvében (3.17/1, 14. o.), illetve Lovász László: *Kombinatorikai problémák és feladatok* c. könyvében (§1. 43/a, 20. o.). Azok a diákok, akik csak hivatkoztak erre, de nem írták le a megoldást, a versenykiírás értelmében 0 pontot kaptak.