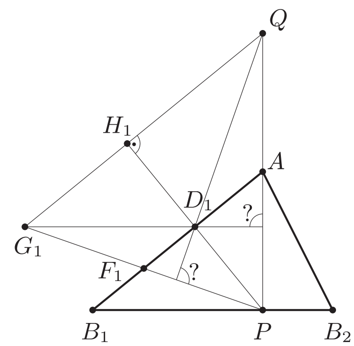
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy QD_i pontosan akkor merőleges PF_i-re, ha PA merőleges B_1B_2-re. Ebből a feladat állítása nyilván következik.

Az AB_1B_2 háromszög hegyesszögű, ezért D_i az AB_i szakasz belső pontja. Legyen P-nek az F_i-re vonatkozó tükörképe G_i. Mivel F_i felezi a B_iD_i szakaszt, azért a $PB_iG_iD_i$ négyszög középpontosan szimmetrikus, vagyis paralelogramma. Tehát G_iD_i párhuzamos PB_i-vel, s így B_1B_2-vel is. Nagyítsuk a PAF_i háromszöget P-ből kétszeresére. A nagyításnál A képe Q, F_i képe G_i, D_i képe pedig az a H_i pont, amely a P-ből QG_i-re állított merőleges talppontja (lásd *ábra*).



A PQG_i háromszögben tehát PH_i magasságvonal. Vizsgáljuk meg, hogy az erre illeszkedő D_i pont mikor lesz a háromszög magasságpontja. Ez pontosan akkor következik be, ha a háromszögnek még egy magasságvonala átmegy D_i-n. (Ekkor persze mindhárom magasságvonal átmegy D_i-n.) A QD_i egyenes pontosan akkor magasságvonal, ha QD_i merőleges PG_i-re, azaz PF_i-re, a G_iD_i egyenes pedig pontosan akkor magasságvonal, ha G_iD_i merőleges PQ-ra, azaz ha a G_iD_i-vel párhuzamos B_1B_2 merőleges AP-re. Vagyis QD_i pontosan akkor merőleges PF_i-re, ha PA merőleges B_1B_2-re, mert mindkettő akkor következik be, ha D_i a PQG_i háromszög magasságpontja.

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

II. megoldás. Állításunk bizonyításához indítsunk A-ból helyvektorokat és jelöljük ezeket a megfelelő kisbetűkkel, azaz legyen tetszőleges X pont esetén $\overrightarrow{AX}=\mathbf{x}$. Ekkor Q és F_i definíciója miatt $\mathbf{q}=-\mathbf{p}$ és $2\mathbf{f}_i=\mathbf{b}_i+\mathbf{d}_i$. Mivel PD_i merőleges AB_i-re, s így AD_i-re is, a megfelelő vektorok skaláris szorzata 0, azaz $(\mathbf{p}-\mathbf{d}_i)\mathbf{b}_i=0$ és $(\mathbf{p}-\mathbf{d}_i)\mathbf{d}_i=0$. Vagyis

$$\mathbf{p}\mathbf{b}_i=\mathbf{d}_i\mathbf{b}_i \quad \text{és} \quad \mathbf{p}\mathbf{d}_i=\mathbf{d}_i^2.$$

A QD_i szakasz pontosan akkor merőleges PF_i-re, ha

$$(\mathbf{d}_i-\mathbf{q})(2\mathbf{p}-2\mathbf{f}_i)=0,$$

amibe behelyettesítve $\mathbf{f}_i$-t és $\mathbf{q}$-t, valamint felhasználva az (1) egyenlőségeket kapjuk, hogy

$$(\mathbf{d}_i+\mathbf{p})(2\mathbf{p}-\mathbf{b}_i-\mathbf{d}_i)=0,$$
$$2\mathbf{p}\mathbf{d}_i-\mathbf{d}_i\mathbf{b}_i-\mathbf{d}_i^2+2\mathbf{p}^2-\mathbf{p}\mathbf{b}_i-\mathbf{p}\mathbf{d}_i=0,$$
$$(\mathbf{p}\mathbf{d}_i-\mathbf{d}_i^2)-(\mathbf{b}_i\mathbf{d}_i+\mathbf{p}\mathbf{b}_i)+2\mathbf{p}^2=0,$$

azaz $2\mathbf{p}^2=2\mathbf{p}\mathbf{b}_i$ vagyis $\mathbf{p}(\mathbf{p}-\mathbf{b}_i)=0$.

Mivel sem $\mathbf{p}$ sem $\mathbf{p}-\mathbf{b}_i$ nem nullvektor, ez pontosan akkor teljesül, ha a két vektor merőleges egymásra, azaz ha AP merőleges PB_i-re. Tehát $i=1,2$-re vagy egyszerre merőleges mindkét pár, vagy egyik pár sem merőleges. Ez épp a bizonyítandó állítás. (A bizonyítás során nem használtuk ki, hogy az AB_1B_2 háromszög hegyesszögű.)