

**I. megoldás.** Mindkét oldalt négyzetre emelve, majd rendezve:

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{15+x} = 9 - 2\sqrt[4]{(2-x)(15+x)}.$$

Ismét négyzetre emelve:

$$\begin{aligned} (2-x) + (15+x) + 2\sqrt{(2-x)(15+x)} &= \\ = 81 + 4\sqrt{(2-x)(15+x)} - 36\sqrt[4]{(2-x)(15+x)}. \end{aligned}$$

Legyen  $a = \sqrt[4]{(2-x)(15+x)}$ . Ekkor

$$17 + 2a^2 = 81 + 4a^2 - 36a,$$

$$0 = 2a^2 - 36a + 64.$$

Innen  $a = 16$  vagy  $a = 2$ .

Ha  $a = 16$ , akkor a  $16 = \sqrt[4]{(2-x)(15+x)}$  egyenlet mindkét oldalát negyedik hatványra emelve, majd rendezve a  $0 = x^2 + 13x + 65$  egyenletet kapjuk. Ennek negatív a diszkriminánsa, tehát nincs megoldása.

Ha  $a = 2$ , akkor a  $2 = \sqrt[4]{(2-x)(15+x)}$  egyenlet mindkét oldalát negyedik hatványra emelve, majd rendezve a  $0 = x^2 + 13x - 14$  egyenletet kapjuk. Ennek megoldása  $x_1 = -14$  és  $x_2 = 1$ , mindkét gyök megoldása az eredeti egyenletnek is.

**II. megoldás.** Legyen  $a = \sqrt[4]{2-x}$ ,  $b = \sqrt[4]{15+x}$ . Ekkor  $a + b = 3$ , valamint  $a^4 + b^4 = 17$ . Írjuk fel az  $(a+b)^4$  hatványt, majd alakítsuk át:

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 = 17 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3.$$

Felhasználva, hogy  $(a+b)^4 = 81$ , a következő egyenletet kapjuk:

$$32 = 2a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3 = ab(2a^2 + 3ab + 2b^2) = ab(2(a+b)^2 - ab) = ab(18 - ab).$$

A zárójelet felbontva és nullára redukálva:

$$(ab)^2 - 18ab + 32 = 0.$$

Ez az egyenlet  $ab$ -re nézve másodfokú, megoldása:  $ab = 16$ , illetve  $ab = 2$ . Ezekből  $a = 3 - b$  felhasználásával:  $(3-b)b = 16$ , vagy  $(3-b)b = 2$ . Így  $b$ -re két másodfokú egyenletet kapunk. Az elsőnek a diszkriminánsa negatív, tehát nincs valós gyöke. A második egyenletből:  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 1$ . Innen:  $\sqrt[4]{15+x} = 2$ ,  $x_1 = 1$ ;  $\sqrt[4]{15+x} = 1$ ,  $x_2 = -14$ . Mindkét  $x$  érték megoldása az eredeti egyenletnek is.

**III. megoldás.** Legyen

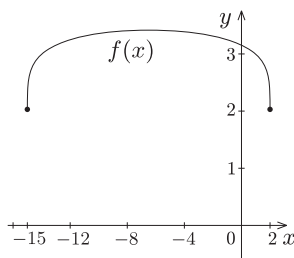
$$f(x) = \sqrt[4]{2-x} + \sqrt[4]{15+x},$$

ahol  $x \in [-15, 2]$ . Végezzünk függvényvizsgálatot. Számítsuk ki először az elsőrendű deriváltat:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(2-x)^3}} \cdot (-1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(15+x)^3}} \cdot (+1) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt[4]{(15+x)^3}} - \frac{1}{\sqrt[4]{(2-x)^3}} \right). \end{aligned}$$

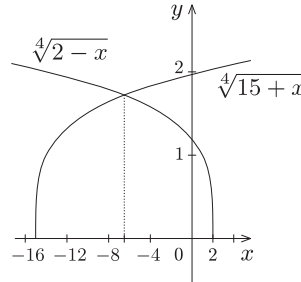
Ez csak akkor lehet 0, ha  $x \neq -15$  és  $x \neq 2$  mellett

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[4]{(15+x)^3}} &= \frac{1}{\sqrt[4]{(2-x)^3}}, \\ 15+x &= 2-x, \quad x = -6,5. \end{aligned}$$



Felhasználva, hogy a  $] -15; 2[$  intervallumon az  $f'(x)$  végig értelmezve van, és pl.  $f'(-7) > 0$ , és  $f'(0) < 0$ , kapjuk, hogy  $f'(x)$  a  $] -15; -6,5[$  intervallumon pozitív, így itt  $f(x)$  szigorúan monoton nő; a  $] -6,5; 2[$  intervallumon negatív, így itt  $f(x)$  szigorúan monoton csökken; végül mivel  $f'(x)$  a  $-6,5$ -ben 0, és előjelet vált, így itt  $f(x)$ -nek maximuma van. Ennek értéke:  $f(-6,5) \approx 3,415 > 3$ . Tehát az  $f$  függvény két helyen veszi föl a 3-at az adott intervallumon. Mivel  $f(1) = f(-14) = 3$ , és  $f(-15) = f(2) \approx 2,03$ , azért az egyenletnek két megoldása van:  $x = 1$  és  $x = -14$ .

*Megjegyzés.* Ábrázolva  $f(x)$  két tagját külön-külön, az *ábráról* sejthető, hogy a metszéspontban ( $x = -6,5$ ) lesz a két függvény összegének értéke maximális, hiszen a metszéspontra szimmetrikus a két függvény, és pl. a metszésponttól jobbra  $\sqrt[4]{2-x}$  „jobban” csökken, mint amennyire  $\sqrt[4]{15+x}$  nő.



Valóban, mivel a  $g(x) = \sqrt[4]{x}$  függvény szigorúan konkáv, azért az  $f$  függvény értéke  $-6,5$ -nél kisebb, illetve nagyobb  $x$ -ekre:

$$\begin{aligned} f(-6,5 + \varepsilon) &= f(-6,5 - \varepsilon) = \sqrt[4]{8,5 - \varepsilon} + \sqrt[4]{8,5 + \varepsilon} = \\ &= 2 \cdot [0,5 \cdot \sqrt[4]{8,5 - \varepsilon} + 0,5 \cdot \sqrt[4]{8,5 + \varepsilon}], \end{aligned}$$

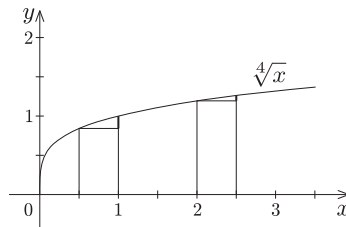
ami a Jensen-egyenlőtlenség szerint  $\varepsilon > 0$  miatt kisebb, mint

$$2 \cdot \sqrt[4]{0,5 \cdot 2 \cdot 8,5} = 2 \cdot \sqrt[4]{8,5} = f(-6,5).$$

Ezzel csak azt mutattuk meg, hogy az  $f(x)$  függvény  $x = -6,5$ -nél veszi fel a maximumát, azt nem, hogy minden más értéket a  $] -15; 6,5[$  és a  $] -6,5; 2]$  intervallumban is csak egyszer-egyszer vesz föl. Ha megnézzük a  $g(x) = \sqrt[4]{x}$  grafikonját, látható, hogy „jobbra” haladva a növekedése lelassul, amiből már következik, hogy  $\delta > \varepsilon$  esetén

$$f(-6,5 + \delta) < f(-6,5 + \varepsilon).$$

( $\sqrt[4]{8,5 - \delta} + \sqrt[4]{8,5 + \delta} < \sqrt[4]{8,5 - \varepsilon} + \sqrt[4]{8,5 + \varepsilon}$ ,  $\sqrt[4]{8,5 + \delta} - \sqrt[4]{8,5 + \varepsilon} < \sqrt[4]{8,5 - \varepsilon} - \sqrt[4]{8,5 - \delta}$ , ami az *ábrán* szemléltetett két szakaszhoz hasonlóan ábrázolható.)



Pontos bizonyítás a III. megoldásban is használt deriválással adható.