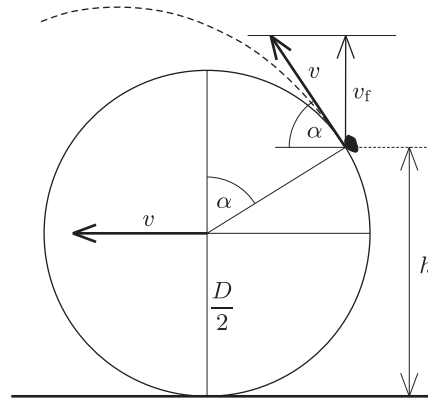


**I. megoldás.** A traktorkeréken lévő sárdarab – még a leválása előtt –  $v$  sebességű vízszintes irányú haladó mozgást és  $\frac{2v}{D}$  szögsebességű forgómozgást végez. Amikor a sárdarab leválik a kerékről, akkor (a leválás helye által meghatározott  $h$  magasságból és meghatározott kezdősebességgel indulva) ferde hajításnak megfelelően mozog tovább. A levegőben töltött  $t$  időt a  $h$  magasság és a kezdősebesség függőleges komponense határozza meg, a vízszintes mozgás az esési idő szempontjából érdektelen.



1. ábra

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor a sárdarab az 1. ábrán látható, az  $\alpha$  szöggel jellemezhető helyzetben válik el a keréktől. A sárdarab magassága ekkor

$$h = \frac{D}{2}(1 + \cos \alpha),$$

kezdősebességének függőleges komponense pedig

$$v_f = v \sin \alpha.$$

A levegőben töltött időt – bármilyen  $\alpha$  szög esetén – a függőleges mozgásra felírható

$$(1) \quad -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v_f \cdot t = -h,$$

vagyis a

$$(2) \quad -\frac{g}{2} \cdot t^2 + v \sin \alpha \cdot t = -\frac{D}{2}(1 + \cos \alpha)$$

egyenletből (annak pozitív gyökét választva) határozhatjuk meg:

$$(3) \quad t(\alpha) = \frac{v}{g} \left[ \sin \alpha + \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{Dg}{v^2}(1 + \cos \alpha)} \right].$$

A  $t(\alpha)$  függvény maximumát (vagyis a leghosszabb esési időt) differenciálszámítással, (3) jobb oldalának  $\alpha$  szerinti deriválásával határozhatjuk meg. A szélsőértéknél a derivált eltűnik:

$$\frac{dt(\alpha)}{d\alpha} = \frac{v}{g} \left[ \cos \alpha + \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \frac{Dg}{2v^2} \sin \alpha}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{Dg}{v^2}(1 + \cos \alpha)}} \right] = 0.$$

A fenti egyenletből algebrai átalakításokkal kapjuk:

$$\frac{Dg}{2v^2} \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha = \cos \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha + \frac{Dg}{v^2}(1 + \cos \alpha)}, \left( \frac{Dg}{2v^2} \sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha \right)^2 = \cos^2 \alpha \cdot \left[ \sin^2 \alpha + \frac{Dg}{v^2}(1 + \cos \alpha) \right], \left( \frac{Dg}{2v^2} \right)^2 \sin^2 \alpha = \cos^2 \alpha (1 + \cos \alpha).$$

Innen a

$$\sin^2 \alpha = (1 + \cos \alpha) \cdot (1 - \cos \alpha)$$

azonosság és  $1 + \cos \alpha \neq 0$  felhasználásával kapjuk, hogy

$$\left(\frac{Dg}{4v^2} - \cos \alpha\right) \cdot (1 - \cos \alpha) = \cos^2 \alpha,$$

vagyis

$$\frac{Dg}{4v^2} - \frac{Dg}{4v^2} \cdot \cos \alpha - \cos \alpha = 0,$$

azaz

$$(4) \quad \cos \alpha = \frac{gD}{gD + 4v^2}.$$

Ez az összefüggés határozza meg a leghosszabb repülési időhöz tartozó  $\alpha$  „sárleválási helyzetet”. (4)-et (3)-ba visszahelyettesítve további algebrai átalakítások után a repülési idő maximumális értékére a

$$t_{\max} = \frac{\sqrt{4v^2 + 2gD}}{g}$$

formulát kapjuk.

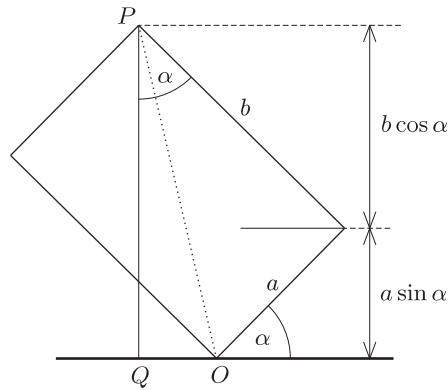
**II. megoldás.** A feladatot elemi úton (differenciálszámítás nélkül) is meg lehet oldani. Induljunk ki (az I. megoldás jelöléseit használva) a függőleges hajítás (2) egyenletéből, melyet átrendezéssel

$$(5) \quad \frac{g}{2} \cdot t^2 - \frac{D}{2} = +v \sin \alpha \cdot t + \frac{D}{2} \cos \alpha$$

alakra hozhatunk. Nyilván elegendő a  $0 < \alpha < 180^\circ$  esetekkel foglalkoznunk, ezekre pedig – tetszőleges  $a$  és  $b$  pozitív számokkal – érvényes az

$$a \sin \alpha + b \cos \alpha \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

egyenlőtlenség.



2. ábra

Tekintsük ugyanis a 2. ábrán látható,  $a$  és  $b$  oldalélű téglalapot, amelynek egyik ( $O$  jelű) csúcsa egy egyenesre illeszkedik. A téglalap „átellenes”  $P$  csúcsának és az egyenesnek  $PQ$  távolsága nem lehet nagyobb, mint a  $PO$  átló  $\sqrt{a^2 + b^2}$  hossza; és ez éppen a belátandó egyenlőtlenség. Az ábráról azt is leolvashatjuk, hogy egyenlőség

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

esetben áll fenn, ekkor a  $PO$  átló merőleges a szóbanforgó egyenesre.

Alkalmazzuk az egyenlőtlenséget az (5) egyenlet jobb oldalára  $a = vt$  és  $b = \frac{D}{2}$  megfeleltetéssel:

$$(6) \quad \frac{g}{2} \cdot t^2 - \frac{D}{2} \leq \sqrt{(vt)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2},$$

megjegyezve, hogy az egyenlőség

$$(7) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2vt}{D}$$

esetén teljesül. (6) négyzetre emelése és átrendezés után a repülési időre a

$$t \leq \frac{\sqrt{4v^2 + 2gD}}{g}$$

korlátot kapjuk, melynek határeseti értékét (7)-be helyettesítve a keresett szöget is kiszámíthatjuk:

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\left(\frac{4v^2}{gD}\right)^2 + \frac{8v^2}{gD}}.$$

Ez egyenértékű az I. megoldás (4) formulájával.

(G. P.)

*Megjegyzés.* A megoldás teljességéhez az is hozzá tartozik, hogy megvizsgáljuk, vajon a kerékről levált sárdarab nem esik-e vissza a kerékre.

**Hartstein Máté** megoldása