

**Megoldás.** Legyenek a háromszög szögei  $\alpha, \beta, \gamma$ , az  $ABC$  háromszög szögfelezőinek és a  $PQR$  háromszög oldalainak metszéspontjai pedig  $D_1, D_2, D_3$ . A kerületi szögek tétele alapján:

$$\angle CAP = \frac{\alpha}{2} = \angle PQC,$$

mert a  $PC$  ívhez tartozó kerületi szögek;

$$\angle ABQ = \frac{\beta}{2} = \angle ACQ,$$

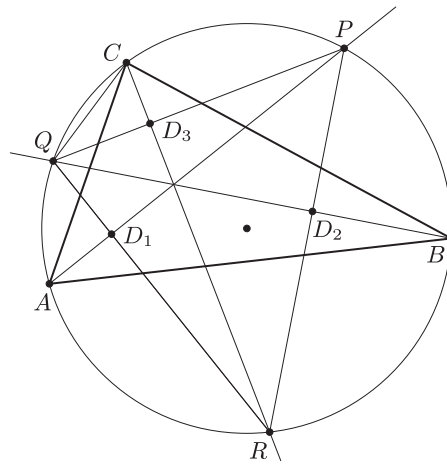
mert az  $AQ$  ívhez tartozó kerületi szögek;

$$\angle ACR = \frac{\gamma}{2}.$$

A  $CQD_3$  háromszögben:

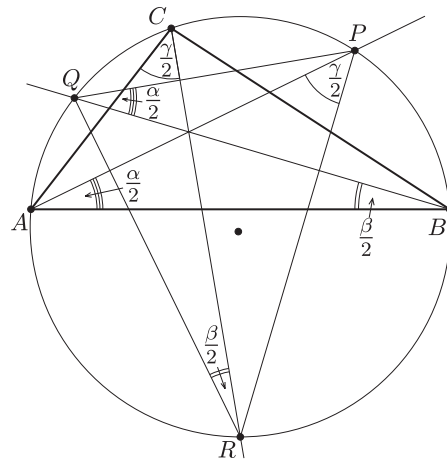
$$\angle QD_3C = 180^\circ - (\angle PQC + \angle ACQ + \angle ACR) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ.$$

Tehát a  $CR$  szögfelező a  $PQR$  háromszög  $R$  pontból induló magasságvonala.



Hasonlóan, a másik két szögfelező is magasságvonala a  $PQR$  háromszögnek. Vagyis az  $ABC$  háromszög szögfelezői a  $PQR$  háromszög magasságvonalai.

*A szerkesztés menete:* Megszerkesztjük a  $PQR$  háromszög körülírt körét és a háromszög magasságvonalait. A magasságvonalaknak a körrel vett metszéspontjai megadják az  $ABC$  háromszög csúcsait.



*Diskusszió:* A kerületi szögek tételének felhasználásával könnyen belátható, hogy a  $PQR$  háromszög szögei:

$$\frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad \frac{\alpha + \beta}{2},$$

és mindhárom szög kisebb, mint  $\frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} = 90^\circ$ , ami azt jelenti, hogy a  $PQR$  háromszög biztosan hegyesszögű.

Tehát a szerkesztés csak akkor végezhető el, ha az adott  $P, Q, R$  pontok hegyesszögű háromszöget határoznak meg. Ilyenkor viszont mindig kapunk egy megoldást, mert minden magasságvonal metszi a kört egy, a  $P, Q, R$  pontoktól különböző pontban.

*Megjegyzés.* A diszkusszióban használt, a  $PQR$  háromszög szögeit leíró észrevétel egyben egy másik szerkesztési eljárást is szolgáltat: a  $\frac{\beta + \gamma}{2}, \frac{\alpha + \gamma}{2}, \frac{\alpha + \beta}{2}$  szögek ismeretében egyszerűen megszerkeszthetők az  $\alpha, \beta, \gamma$  szögek; pl.

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{\beta + \gamma}{2}.$$

Ezzel a  $PQR$  háromszög köré írt körbe megszerkeszthető egy, az  $ABC$  háromszöggel egybevágó  $A_1B_1C_1$  háromszög, és az ehhez tartozó  $P_1Q_1R_1$  háromszög. Az  $A_1B_1C_1$  háromszöget a kör  $O$  középpontja körül a  $P_1OP$  szöggel elforgatva megkapjuk az  $ABC$ -t.