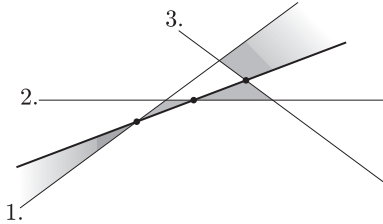


Megoldás. A szabályos sokszögek oldalegyenesei által meghatározott két-két félsík közül mindig pontosan az egyik tartalmazza a sokszöget. Ezért az oldalegyenesek közül semelyik három nem mehet át egy ponton. Ha ugyanis valamelyik három oldalegyenes egy ponton menne át, akkor közülük a középső által meghatározott mindkét félsíkban lenne pontja a sokszögnek, ami ellentmondás. Ha n páratlan, akkor az oldalegyenesek közt nincsenek párhuzamosak, ha pedig n páros, akkor a szemközti oldalegyenesek párhuzamosak.

A síkrészek számának meghatározásához helyezzük az oldalegyeneseket egymás után egyesével a síkra. Kezdetben 1 síkrész van, ami az első egyenes elhelyezése után 1-gyel nő. Amikor egy-egy új egyenest elhelyezünk, akkor a tartományok száma $(i + 1)$ -gyel nő, ahol i azon, már korábban elhelyezett egyenesek száma, amelyeket az éppen elhelyezett egyenes metsz, mert az i darab metszéspont az új egyenest $i + 1$ részre osztja, s minden ilyen rész egy-egy régi tartományt kettévág.



Ha n páratlan, akkor az i -edik egyenes elhelyezésénél a keletkező metszéspontok száma $i - 1$, tehát a tartományok száma pontosan i -vel nő, vagyis az összes egyenes elhelyezése után a tartományok száma

$$1 + (1 + 2 + 3 + \dots + n) = 1 + \frac{n(n + 1)}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Páros n esetén más a helyzet. Legyen $n = 2m$, és először helyezzük el valamilyen körüljárás szerint az első m oldalegyenest. Ezek közül semelyik kettő nem párhuzamos egymással, ezért az i -edik egyenesen $i - 1$ metszéspont keletkezik, s így az elhelyezésük után létrejövő tartományok száma $1 + (1 + 2 + \dots + m)$ lesz. A további m darab egyenes elhelyezésekor minden új egyenes a korábban elhelyezettek közül pontosan eggyel lesz párhuzamos. Ezért az $(m + i)$ -edik egyenesen csak $m + i - 2$ metszéspont keletkezik. Ebben az esetben tehát az egyenesek összesen

$$1 + (1 + 2 + \dots + m) + (m + \dots + 2m - 1) = 1 + m \cdot 2m = \frac{n^2 + 2}{2}$$

részre osztják a síkot.