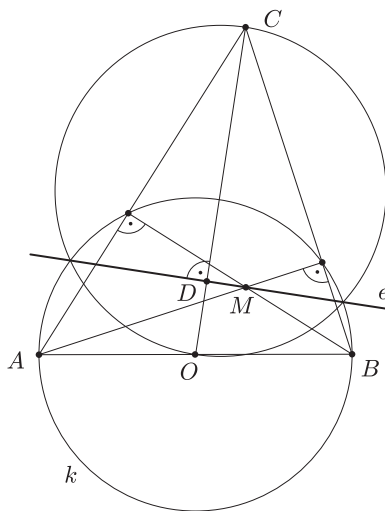


I. megoldás. Jelöljük a körvonalat k -val, középpontját O -val, sugarát pedig r -rel. Ha C egybeesik O -val, akkor sohasem keletkezik háromszög, ezért ekkor a mértani hely üres. Ha C a körvonalra esik, akkor Thalész tétele szerint a keletkezett ABC háromszögek C -nél lévő szöge derékszög, azaz a magasságpontjuk mindig C , tehát ekkor a mértani hely egyedül a C pontból áll.



A továbbiakban tegyük fel, hogy a C pont c távolságra helyezkedik el O -tól, ahol $0 < c \neq r$. Legyen D az OC félegyenesnek az a pontja, amely O -tól $d = r^2/c$ távolságra van¹. Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely az az e egyenes, amely merőleges az OC egyenesre és áthalad D -n.

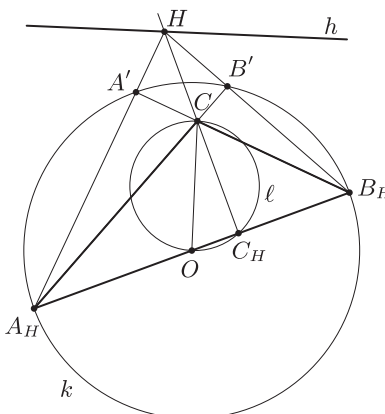
Indítsunk O -ból helyvektorokat és jelöljük ezeket a megfelelő kisbetűvel, azaz tetszőleges P pont esetén legyen $\overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$. Ha az ABC háromszög magasságpontja M , akkor M -et a háromszög csúcsaival összekötő egyenesek merőlegesek a háromszög szemközti oldalaira. Tehát $\mathbf{m} - \mathbf{a}$ merőleges a $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ vektorra, $\mathbf{m} - \mathbf{b}$ pedig merőleges a $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ vektorra. Mivel $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$, a vektorok skaláris szorzatát használva ezt az

$$(\mathbf{m} - \mathbf{a})(\mathbf{c} + \mathbf{a}) = 0 \quad \text{és} \quad (\mathbf{m} + \mathbf{a})(\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0$$

összefüggésekkel fejezhetjük ki. Ezeket összeadva kapjuk, hogy $2\mathbf{m}\mathbf{c} - 2\mathbf{a}^2 = 0$, vagyis $\mathbf{m}\mathbf{c} = \mathbf{a}^2$. A D definíciójából viszont az következik, hogy $\mathbf{d}\mathbf{c} = \mathbf{a}^2$, ezért $\mathbf{m}\mathbf{c} = \mathbf{d}\mathbf{c}$, s így $(\mathbf{m} - \mathbf{d})\mathbf{c} = 0$. Az $\mathbf{m} - \mathbf{d}$ vektor tehát merőleges a $\mathbf{c}$ vektorra, vagyis MD merőleges OC -re. Ezért az M pont rajta van az e egyenesen.

Megmutatjuk, hogy az e egyenes minden pontja előáll valamely megfelelő háromszög magasságpontjaként. Legyen E az e egyenes tetszőleges pontja. A k -nak pontosan egy EC -re merőleges $A_E B_E$ átmérője létezik. Mivel EC nem párhuzamos e -vel, az A_E és B_E nem eshet az OC egyenesre, tehát A_E , B_E , és C mindig háromszöget alkot. Ennek a háromszögnek a magasságpontja az előzőekben bizonyítottak szerint illeszkedik e -re, s mivel EC merőleges $A_E B_E$ -re, azért EC -re is. Azaz a magasságpont nem lehet más, mint az EC egyenes e -vel alkotott E metszéspontja.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit. Ha $C \equiv O$ vagy $C \in k$, akkor ugyanazt mondhatjuk, mint az I. megoldásban. Ha ezek egyike sem teljesül, akkor legyen az OC szakasz Thalész-köre ℓ , a k és ℓ hatványvonala² h , az ABC háromszög magasságainak talppontjai pedig rendre A' , B' és C' . Megmutatjuk, hogy a keresett mértani hely a h egyenes.



¹Ez éppen C -nek a k -ra vonatkozó inverze.

²A hatványvonalról bővebben lásd: <http://www.lexikon.fazekas.hu/>.

Az ABC háromszög f Feuerbach-köre átmegy az A' , B' , C' pontokon, valamint az MA , MB , MC szakaszok felezőpontjain. Ezért M -nek f -re vonatkozó hatványát szelőszakaszok szorzataként felírva kapjuk, hogy

$$A'M \cdot \frac{MA}{2} = B'M \cdot \frac{MB}{2} = C'M \cdot \frac{MC}{2},$$

azaz

$$A'M \cdot MA = B'M \cdot MB = C'M \cdot MC.$$

Viszont $AA'B \angle = BB'A \angle = OC'C \angle = 90^\circ$, ezért Thalész tételének megfordítása miatt A' és B' rajta vannak k -n, C' pedig rajta van ℓ -en. Tehát $A'M \cdot MA = B'M \cdot MB$ éppen M -nek k -ra vonatkozó hatványa, míg $C'M \cdot MC$ az M -nek ℓ -re vonatkozó hatványa. Vagyis M -nek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, ezért M illeszkedik a körök h hatványvonalára.

Be kell még látnunk, hogy h minden pontja a mértani helyhez tartozik. Tetszőleges h -ra illeszkedő H pont esetén legyen HC és ℓ C -től különböző metszéspontja C_H (ez mindig létezik, mert ℓ -nek a C -beli érintője párhuzamos h -val), k -nak a CC_H egyenesre merőleges átmérője pedig $A_H B_H$. Mivel CC_H nem párhuzamos h -val, azért A_H , B_H , és C mindig háromszöget alkot. Ennek a háromszögnek a magasságpontja az előzőekben bizonyítottak szerint illeszkedik h -ra, s mivel CC_H merőleges $A_H B_H$ -ra, így CC_H -ra is. Azaz a magasságpont nem lehet más, mint a CC_H egyenes h -val alkotott H metszéspontja.