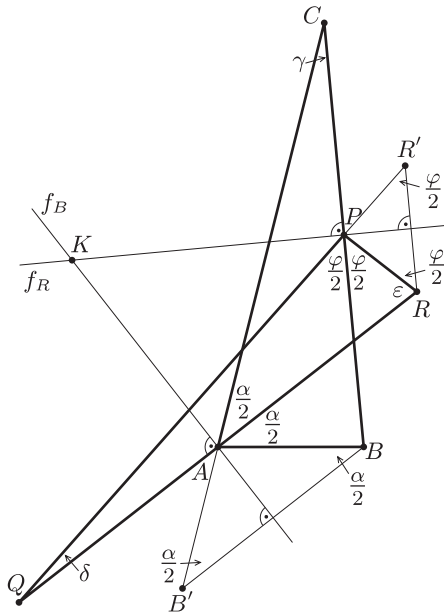


I. megoldás. Jelölje az ABC és a PQR háromszögek szögeit az 1. ábrán látható módon α, β, γ , illetve $\varphi, \delta, \varepsilon$. Mérjük fel az AC oldal A -n túli meghosszabbítására az AB , a PQ oldal P -n túli meghosszabbítására a PR szakaszt. Az így kapott pontok legyenek B' , illetve R' . Így a bizonyítandó állítás $B'C = R'Q$.

Az $AB'B$ egyenlőszárú háromszög A -nál lévő külső szöge α , ezért

$$\angle AB'B = \angle ABB' = \frac{\alpha}{2}.$$

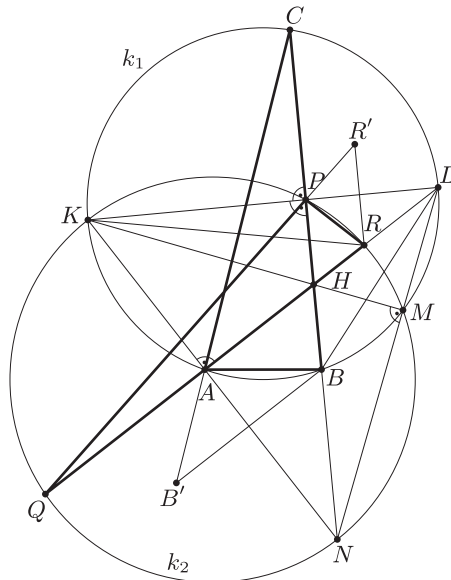
Mivel QR felezi a BAC szöget, $\angle BAR = \frac{\alpha}{2} = \angle ABB'$, vagyis BB' és RQ párhuzamosak. Ugyanígy kapjuk a $PR'R$ háromszög egyenlőszárúságából kiindulva, hogy RR' és BC is párhuzamosak (1. ábra).



1. ábra

A BB' szakasz felezőmerőlegese, f_B átmegy A -n, ami QR felezőpontja, tehát f_B egyúttal QR -nek is szakaszfelező merőlegese. Ugyanígy kapjuk, hogy az RR' szakasz felezőmerőlegese, f_R átmegy P -n, ami BC felezőpontja, tehát f_R egyúttal BC -nek is szakaszfelező merőlegese. Ezért a $K = f_B \cap f_R$ pont a $B'BC$ és az $R'RQ$ háromszögek körülírt köreinek is középpontja.

A $B'BC$ háromszög köré írt körben a BC húrhoz $\frac{\alpha}{2}$ kerületi szög tartozik, ezért a megfelelő középponti szög $\angle BKC = \alpha$. Viszont $\angle BAC = \alpha$, tehát a BC szakasz K -ból és A -ból ugyanakkora szögben látszik, ezért $BCKA$ húrnégyszög. Legyen a köré írható kör k_1 . Hasonlóan kapjuk, hogy $RQKP$ is húrnégyszög, az e köré írható kör legyen k_2 (2. ábra).



2. ábra

Legyen k_1 és k_2 második metszéspontja M , KP és k_1 , illetve KA és k_2 második metszéspontja L , illetve N . Mivel KP merőlegesen felezi k_1 -ben a BC húrt, KL átmérő k_1 -ben. Ugyanígy kapjuk, hogy KN átmérő k_2 -ben. Ezért Thalész tétele szerint

$$\angle LMK = \angle NML = 90^\circ,$$

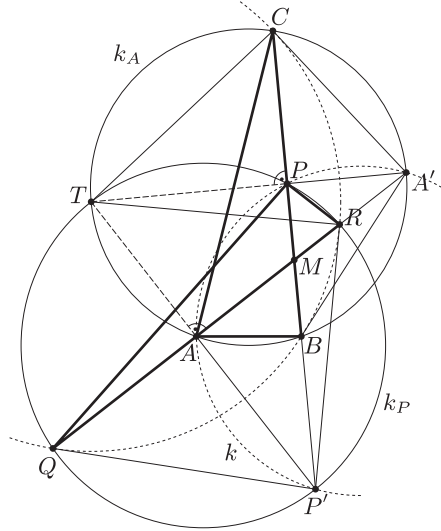
vagyis L , M és N egy egyenesen vannak. Ugyancsak Thalész tétele miatt $\angle KAL = 90^\circ$, s mivel KA az RQ szakaszfelező merőlegese, A , R és L is egy egyenesen vannak. Ugyanígy látható be, hogy P , B és N is kollineárisak. Ez viszont azt jelenti, hogy a KLN háromszög magasságvonalai éppen KM , LA és NP , azaz e három egyenes a KLN háromszög H magasságpontjában metszi egymást. Ekkor a szelőszakaszok szorzatára vonatkozó tételt (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I*, 1325. és 1327. feladatok) H -ra és a k_1 , illetve k_2 körre alkalmazva kapjuk, hogy

$$BH \cdot HC = KH \cdot HM, \text{ és } RH \cdot HQ = KH \cdot HM, \text{ azaz } BH \cdot HC = RH \cdot HQ,$$

vagyis B , C , R és Q egy k körön vannak. Viszont már láttuk, hogy BC és RQ felezőmerőlegese is átmegy K -n, ezért a négy ponton átmenő kör középpontja K , amiből az következik, hogy k egyúttal a $B'BC$ és $R'RQ$ háromszögek közös körülírható köre.

Most már csak azt kell megmutatnunk, hogy k -ban a $B'C$ és $R'Q$ húrokhoz ugyanakkora kerületi szög tartozik. Ez a szög (lásd az 1. ábrát) k_1 -ben $\angle B'BC = \frac{\alpha}{2} + \beta$, míg k_2 -ben $\angle R'RQ = \frac{\varphi}{2} + \varepsilon$. Ezek viszont egyenlők, mert mindkettő megegyezik $(180^\circ - \angle AKP)$ -gel, hiszen AK merőleges $B'B$ -re is és RQ -ra is, PK pedig merőleges BC -re is és $R'R$ -re is. Ezért $B'C = R'Q$, s így az állítást beláttuk.

II. megoldás. Az ABC háromszög köré írható kört jelölje k_A , a PQR háromszög köré írható pedig k_P . A BC egyenesnek a k_P körrel alkotott második metszéspontja legyen P' , a QR egyenesnek k_A -val alkotott második metszéspontja pedig A' . Mivel $\angle QPP' = \angle RPP'$, kapjuk, hogy $QP' = RP'$, vagyis AP' a QR szakasz felezőmerőlegese. Hasonlóképpen $BA' = CA'$, és PA' a BC szakasz felezőmerőlegese.



3. ábra

Legyen $\angle AP'P = \varepsilon$ és $\angle P'AB = \eta$. Mivel $\angle CAA' = \angle BAA' = 90^\circ - \eta$, azért

$$\angle CAP' = 180^\circ - \eta,$$

és így

$$\angle BA'A = \angle BCA = \eta - \varepsilon.$$

Továbbá $\angle CA'A = \angle CBA = \varepsilon + \eta$, ahonnan $\angle CA'P = \angle BA'P = \eta$, és $\angle PA'A = \varepsilon$ következik. Ezért az A' , P , A , P' pontok egy k körvonalra illeszkednek, továbbá ha az $A'P$ és $P'A$ egyenesek metszéspontját T -vel jelöljük, akkor

$$\angle A'TA = 90^\circ - \varepsilon = \angle BAA' + \angle BCA = \angle BCA' + \angle BCA = \angle A'CA.$$

A T pont tehát illeszkedik a k_A körre, és ugyanígy a k_P körre is, méghozzá TA' a k_A körnek, míg TP' a k_P körnek átmérője is egyben (3. ábra).

Felhasználva, hogy $P'R = P'Q$ és hogy A felezi a QR szakaszt, valamint Ptolemaiosz tételét (lásd pl. *Geometriai feladatok gyűjteménye I*, 1259. feladat) a $PQP'R$ húrnégyszögben, kapjuk hogy

$$(PQ + PR) \cdot P'R = PQ \cdot P'R + PR \cdot QP' = QR \cdot PP' = 2AR \cdot TP' \cos \varepsilon.$$

Mivel a $P'AR$ és $P'RT$ derékszögű háromszögek P' -nél lévő szöge közös, ezért a háromszögek hasonlóak, tehát

$$PQ + PR = 2 \cdot \frac{AR}{RP'} \cdot TP' \cdot \cos \varepsilon = 2 \cdot \frac{RT}{TP'} \cdot TP' \cdot \cos \varepsilon = 2 \cdot TR \cdot \cos \varepsilon,$$

és ugyanígy kapjuk az $A'PC$ és $A'CT$ háromszögek hasonlóságából, hogy

$$AB + AC = 2 \cdot TC \cdot \cos \varepsilon.$$

A bizonyítandó állításhoz elegendő tehát a $TR = TC$ egyenlőséget igazolni.

Legyen BC és RQ metszéspontja M . Alkalmazzuk a szelőszakaszok szorzatára vonatkozó tételt az M pontra és rendre a k_A , k és k_P körökre:

$$MB \cdot MC = MA \cdot MA' = MP \cdot MP' = MQ \cdot MR.$$

Tehát a B , Q , C és R pontok egy körre esnek. $TB = TC$ és $TQ = TR$ miatt ennek a körnek éppen T a középpontja, vagyis valóban $TR = TC$. Ezzel az állítást beláttuk.