

I. megoldás. Ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$, akkor a kifejezés értéke

$$\sin 60^\circ \sin 60^\circ \cos 60^\circ + \sin^2 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}.$$

Megmutatjuk, hogy minden más esetben a kifejezés értéke ennél kisebb. Mivel $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$, azért $\cos(\alpha + \beta) = -\cos \gamma$, az addíciós tételekből pedig következik, hogy

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}.$$

A kifejezést a fenti összefüggések felhasználásával átalakítva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} K &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin^2 \gamma = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \cdot \cos \gamma + 1 - \cos^2 \gamma = \\ &= \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos \gamma) \cdot \cos \gamma + 1 - \cos^2 \gamma = \\ &= \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \cos \gamma + 1 - \frac{1}{2} \cos^2 \gamma = \\ &= 1 - \frac{1}{2}(\cos^2 \gamma - \cos(\alpha - \beta) \cos \gamma) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} \left[\left(\cos \gamma - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{2} \right)^2 - \frac{\cos^2(\alpha - \beta)}{4} \right] = \\ &= 1 + \frac{1}{8} \cos^2(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \left(\cos \gamma - \frac{\cos(\alpha - \beta)}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Mivel bármely valós szám négyzete nemnegatív, valamint minden x valós szám esetén $\cos^2 x \leq 1$, azért

$$K \leq 1 + \frac{1}{8} \cos^2(\alpha - \beta) \leq \frac{9}{8}.$$

Az is látszik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha $\alpha = \beta$ és $\cos \gamma = \frac{\cos 0^\circ}{2} = \frac{1}{2}$, azaz ha a háromszög szabályos. Ezzel az állítást beláttuk.

II. megoldás. Az első megoldáshoz hasonlóan most is az $\alpha + \beta = 180^\circ - \gamma$ összefüggésből indulunk ki. Ebből következik, hogy

$$\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta) \quad \text{és} \quad \cos \gamma = -\cos(\alpha + \beta),$$

vagyis az az addíciós képletek felhasználva:

$$\begin{aligned} K &= \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin^2 \gamma = \\ &= -\sin \alpha \sin \beta (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)^2 = \\ &= \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta. \end{aligned}$$

Mivel bármely x szögre teljesül, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, azért

$$(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = 1,$$

s így

$$\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta,$$

vagyis

$$\begin{aligned} K &= 1 - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos \alpha \cos \beta = \\ &= 1 + \cos \alpha \cos \beta (\sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta) = 1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma. \end{aligned}$$

Egy háromszögben a szögek koszinuszainak szorzata pontosan akkor pozitív, ha a háromszög hegyesszögű. Ezért ha K maximumát keressük, akkor feltehetjük, hogy a háromszög hegyesszögű. Mivel a $\cos x$ függvény a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon pozitív és alulról konkáv, a számtani és mértani közepek között fennálló egyenlőtlenség, valamint a Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$K \leq 1 + \left(\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \right)^3 \leq 1 + \cos \left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3} \right)^3 = 1 + \cos^3 60^\circ = \frac{9}{8}.$$

Tehát K legnagyobb értéke $\frac{9}{8}$, s ezt pontosan akkor veszi fel, ha a háromszög szabályos.