

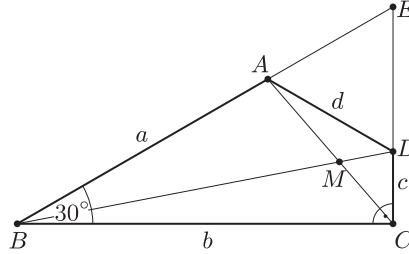
I. megoldás. Jelölje az átlók metszéspontját M , az a és a c oldal meghosszabbításának metszéspontját pedig E (1. ábra). Ekkor

$$\angle CEB = 180^\circ - (\angle EBC + \angle BCE) = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ.$$

Vagyis az EBC háromszög egy olyan szabályos háromszög fele, amelynek b a magassága. Így

$$EB = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{9}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6\sqrt{3}, \quad \text{ahonnan} \quad EA = EB - a = 2\sqrt{3}.$$

Mivel CE az EB fele, a hossza $3\sqrt{3}$. Ezekből $DE = CE - c = 2\sqrt{3}$.



1. ábra

Az ADE háromszög két oldala egyenlő, és az általuk bezárt szög 60° , ezért szabályos. Tehát $d = 2\sqrt{3}$, $\angle EAD = \angle ADE = 60^\circ$, amiből $\angle DAB = \angle CDA = 120^\circ$.

Az ABD háromszögben: $\angle ABD + \angle BDA = 180^\circ - \angle DAB = 60^\circ$. Az ABD és a DAC háromszögek hasonlóak, mert

$$\frac{AB}{DA} = \frac{4\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{DA}{CD}$$

és az ezen két oldal által közbezárt szög $\angle DAB = \angle CDA = 120^\circ$. Emiatt $\angle ABD = \angle DAC$ is teljesül.

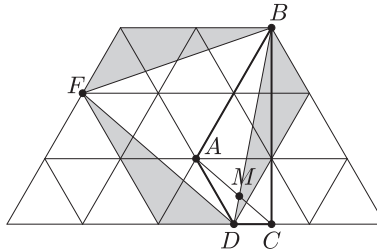
Mindezekből:

$$\begin{aligned} \angle AMD &= 180^\circ - (\angle DAM + \angle MDA) = 180^\circ - (\angle DAC + \angle BDA) = \\ &= 180^\circ - (\angle ABD + \angle BDA) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \end{aligned}$$

Tehát a négyszög átlói $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ -ot zárnak be egymással.

II. megoldás. Az előző megoldásból felhasználjuk, hogy az $ABCD$ négyszög negyedik oldalának hossza $2\sqrt{3}$, és a fennmaradó két szög nagysága pedig 120° .

Helyezzük el ezt a négyszöget egy „szabályos háromszög-rácsban”, ahol a szabályos háromszögek oldalának hossza $2\sqrt{3}$ (2. ábra). Könnyen látható, hogy a magasságuk 3.



2. ábra

Az ábrán rajzoljuk be az átlókat, majd a rövidebbik átlót toljuk el $\sqrt{3}$ -mal az ábrán látható módon, majd hosszabbítsuk meg, így kapjuk az F pontot. A DBF háromszög szabályos, mert mindhárom oldala egy olyan háromszög leghosszabb oldala, amelynek két rövidebb oldala $2\sqrt{3}$ és $4\sqrt{3}$, és az általuk bezárt szög 120° -os. Ezért $\angle BDF = 60^\circ$. Az átlók metszéspontját M -mel jelölve $\angle BMA$ és $\angle BDF$ egyállású szögek, ezért $\angle BMA = 60^\circ$, a négyszög átlói által bezárt szög tehát 60° .

III. megoldás. Használjuk az 1. ábra jelöléseit. Legyen továbbá $\angle BMA = \varphi$. Az I. megoldás szerint $BE = 6\sqrt{3}$, $CE = 3\sqrt{3}$ és az ADE háromszög egy $2\sqrt{3}$ oldalú szabályos háromszög, így magassága 3.

Számítsuk ki kétféleképpen a négyszög területét.

$$(1) \quad T = T_{BCE} - T_{ADE} = \frac{3\sqrt{3} \cdot 9}{2} - \frac{2\sqrt{3} \cdot 3}{2} = \frac{21\sqrt{3}}{2}.$$

$$(2) \quad T = \frac{BD \cdot AC}{2} \cdot \sin \varphi.$$

A Pitagorasz-tételből: $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$. Az A -ból a BC oldalra állított merőleges talppontját F -fel jelölve látható, hogy a $BFA\triangle$ is egy szabályos háromszög fele, amiből $BF = 6$ és

$$AC = \sqrt{AF^2 + FC^2} = \sqrt{21}.$$
$$(3) \quad T = \frac{2\sqrt{21} \cdot \sqrt{21}}{2} \cdot \sin \varphi = 21 \sin \varphi.$$

IV. megoldás. Tekintsük az 1. ábrát.

$$AC^2 = 48 + 81 - 2 \cdot 36 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = 21,$$

Számoljuk ki β és γ szinusztát és koszinuszát:

Az ABC háromszögre vonatkozó szinusztételből adódóan:

amiből $\sin \gamma = \frac{2}{\sqrt{7}}$. Ebből (mivel $\gamma < 90^\circ$) kapjuk, hogy

Végül az addíciós-tételt felhasználva:

és így $\alpha = 60^\circ$.

The diagram shows a triangle \$ABC\$ with base \$AB = 9\$. A point \$D\$ is located above the base such that \$AD = 4\sqrt{3}\$ and \$DB = d\$. A vertical segment \$DT\$ is drawn from \$D\$ to the base \$AB\$, meeting it at \$T\$. The length \$AT\$ is given as \$6\$, which implies \$TB = 3\$. A point \$M\$ lies on the segment \$DC\$. The distance \$DM\$ is labeled \$\gamma\$, and the distance \$MB\$ is labeled \$\beta\$. The angle at vertex \$A\$ is composed of \$30^\circ\$ and \$\alpha\$. The angle at vertex \$B\$ is labeled \$\beta\$.

Mivel γ az ABM háromszög külső szöge, azért $\gamma = \alpha + \beta$. Meghatározásához használjuk fel a

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

összefüggést.

Az ABC háromszögben $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

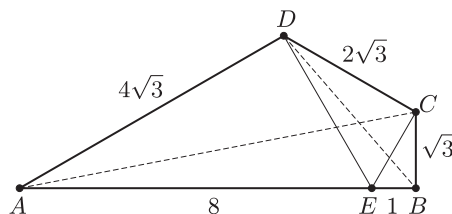
Az ATD háromszög egy szabályos háromszög fele, így $TD = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ és $AT = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 6$. Így $TB = 9 - 6 = 3$, és a TBD háromszögben $\operatorname{tg} \beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Így tehát

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} (\alpha + \beta) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{7\sqrt{3}}{9}}{\frac{21}{27}} = \sqrt{3}, \quad \text{amiből} \quad \alpha = 60^\circ.$$

VI. megoldás. Állítsunk D -ben merőlegest AD -re, és ennek az AB oldallal vett metszéspontja legyen E . Az ADE háromszögben $\angle DAE = 30^\circ$ és $\angle ADE = 90^\circ$, ezért a háromszög harmadik szöge,

$\angle AED = 60^\circ$, és AD ismeretében DE és AE is meghatározható: $AE = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}/2} = 8$, illetve $DE = AE/2 = 4$.



4. ábra

Ezután kössük össze az E és a C pontokat. Az EBC háromszög derékszögű, befogói $\sqrt{3}$ és 1 hosszúak, így átfogója, $EC = 2$, tehát ez a háromszög is egy szabályos háromszög fele, $\angle ECB = 60^\circ$ és

$\angle ECB = 30^\circ$.

A DEC háromszög oldalai: $EC = 2$, $ED = 4$ és $CD = 2\sqrt{3}$, tehát ez is egy szabályos háromszög fele, $\angle DEC = 60^\circ$, $\angle DCE = 90^\circ$ és $\angle EDC = 30^\circ$.

Tekintsük ezután az ADC és a DCB háromszöget. A két háromszög hasonló, hiszen

$$\frac{AD}{DC} = \frac{DC}{CB} \quad \text{és} \quad \angle ADC = \angle DCB = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ,$$

tehát két oldaluk aránya és az általuk közrezárt szög megegyezik. Ez azt jelenti, hogy van olyan középpontos hasonlósági transzformáció, amely az ADC háromszöget a DCB háromszögbe viszi. Mivel az AD és a DC egyenesek által bezárt szög $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, ezért az AC és a DB egyenesek által bezárt szög is 60° .