

Megoldás. A foton és az elektron ütközésénél megmarad az energia is és a lendület is, de ezeket a mennyiségeket a relativisztikus képletekből kell kiszámítanunk.

Az elektron akkor kapja a legnagyobb lendületet (akkor lesz a legnagyobb a sebessége), ha az ütközés után a foton az eredeti irányával éppen ellentétesen mozog tovább. (Ez az állítás, amely szemléletünk szerint igaznak tűnik, részletes számítással igazolható; ezt a számítást azonban itt most nem végezzük el.)

Az m nyugalmi tömegű álló elektronokat bombázó f frekvenciájú, λ hullámhosszúságú fotonok energiája a feladat szövege szerint

$$E = hf = mc^2,$$

a fotonok lendülete pedig

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hf}{c} = mc.$$

(Általánosan érvényes a fotonokra az $E = pc$ összefüggés, c a fénysebesség vákuumban.) Az álló elektronok energiája mc^2 , lendületük nulla. Innen következik, hogy a két részecske összes energiája $2mc^2$, összes lendülete pedig mc .

Ha az ütközés után a visszafelé haladó foton energiája E_f , lendülete pedig $p_f = E_f/c$, a meglökött elektron megfelelő adatai E_e , illetve p_e , akkor a megmaradási törvények értelmében

$$E_f + E_e = 2mc^2,$$

$$p_e - \frac{E_f}{c} = mc.$$

(A második képletben kifejeztük a foton lendületét az energiájával, és a negatív előjellel azt vettük figyelembe, hogy mozgásiránya a bejövő fotonéval ellentétes.) A második egyenlet c -szeresét az elsőhöz hozzáadva E_f kiküszöbölhető:

$$cp_e + E_e = 3mc^2.$$

Ha a meglökött elektron sebessége v , energiája és lendülete a relativisztikus képletek szerint

$$E_e = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_e = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Ezeket az összefüggéseket a fentebbi egyenletbe helyettesítve

$$\frac{mvc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3mc^2$$

adódik, melyből algebrai átalakításokkal kapjuk, hogy

$$\frac{v + c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 3c,$$

$$\sqrt{\frac{c + v}{c - v}} = 3,$$

tehát

$$\frac{c + v}{c - v} = 9,$$

vagyis a meglökött elektron legnagyobb sebessége

$$v = \frac{4}{5}c = 2,4 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$