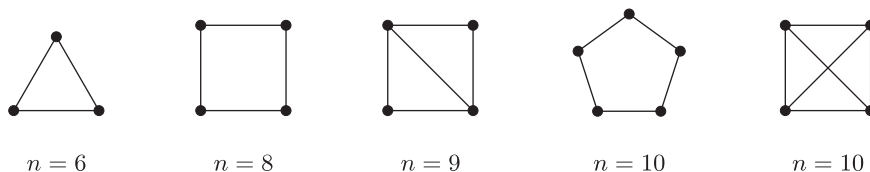


I. megoldás. Alkalmazzunk teljes indukciót az élszám és a csúcsszám összegére, n -re. Két csúcsú ilyen gráf nincs; három csúcsú egy van, a háromszög, és arra nyilván igaz az állítás. Ekkor $n = 6$, és ez az egyetlen ilyen gráf. Az ábrán látható az összes gráf $n = 6, 8, 9$ és 10 esetén ($n = 7$ -re nincs megfelelő gráf). Ezen gráfok mindegyik csúcsa megfelelő csúcs.



Legyen $n > 10$ és tegyük fel, hogy az állítás $k < n$ esetén igaz. Két esetet különböztetünk meg.

1) A G gráfban van pontosan 2-fokú csúcs. Hagyjuk el ezt a csúcsot a gráfból a belőle induló két éllel együtt. Ha két szomszédját még nem köti össze él, akkor húzzuk be azt. Ekkor a megmaradt gráfban n értéke 2-vel vagy 3-mal csökken, és így az indukció szerint igaz rá az állítás. Ha egy kör valamely éle az esetleg újonnan megjelenő él, akkor vegyük az elhagyott csúcsot a hozzá tartozó 2 éllel, így újra kört kapunk; a többi kör esetén pedig nincs szükség változtatásra.

2) Minden csúcs foka legalább 3. Ekkor bármely él elhagyásával egyrészt n értéke csökken 1-gyel, másrészt a megmaradt gráfban is minden foksza legalább 2, tehát van benne megfelelő csúcs. Nem mindegy, hogy melyik élt hagyjuk el: csak olyat hagyhatunk el, amelyik egy körön fekszik. (Mivel a gráfban minden csúcs foka legalább 2, így biztosan van benne kör.) Tekintsük a megmaradt gráfban az indukció szerint létező csúcsot. Ha ez a csúcs az elhagyott él egyik végpontjával sem esik egybe, akkor annak visszavétele után is jó lesz a keresett tulajdonságú csúcsnak. Ha pedig ezen él valamelyik végpontja, akkor az él visszavétele után erre az élre is teljesülni fog, hogy benne van egy körben – éppen ezért nem választottuk tetszőlegesen az elhagyott élt.

Az állítás tehát mindkét esetben igaz $n = k$ -ra.

II. megoldás. Legyen a gráfban található leghosszabb út L , ennek egyik végpontja pedig A . Egy él már biztosan kiindul A -ból, ennek másik végpontját jelölje B . Mivel a gráfban minden csúcs foksza legalább 2, azért A -ból legalább még egy további él kiindul. Egy ilyen él nem lehet hurokél, mert G egyszerű gráf. Az él A -tól különböző végpontja L -ben kell hogy legyen, ellenkező esetben ugyanis lenne L -nél hosszabb út a gráfban. Legyen ez a végpont C . Az L -nek az A és C csúcsot összekötő része (ami szintén út, és tartalmazza B -t) és az $A-C$ él kört alkotnak. Ez bármely A -ból induló, AB -től különböző élre elmondható. Az AB él pedig az összes ilyen körben benne van. Így minden A -ból induló él benne lesz egy körben. Tehát az A csúcs megfelelő.

III. megoldás. Végtelen gráfra az állítás nem igaz, hiszen például egy egyenes mentén elhelyezett, végtelen csúcsú gráfban, melyben a szomszédos csúcsokat köti össze él, nincs kör.

Tegyük föl, hogy a gráf véges, és nem igaz rá az állítás, azaz minden csúcsához van belőle kiinduló olyan él, amely nincs benne egy körben sem. Az ilyen élt a továbbiakban nevezzük rossz élnek.

Mivel a gráf minden csúcsának legalább 2 a foksza, biztosan tartalmaz kört.

Tekintsünk G -ben egy K_1 kört. Ennek minden csúcsából kiindul egy rossz él, ami így nincs benne K_1 -ben. Vegyük a kör valamely C_1 csúcsát, s az ebből kiinduló rossz él másik végpontját véve második csúcsnak, induljunk el C_1 -ből a rossz él irányában. Ennek az élnek a másik végpontja legyen C_2 . Legyen egy lépés az, hogy egy C_i csúcsból ($i \geq 2$) a C_{i+1} csúcsba lépünk úgy, hogy $C_{i+1} \neq C_{i-1}$, valamint a C_i és a C_{i+1} csúcsot él köti össze. (A továbblépés mindig lehetséges, mert C_i foksza legalább 2.) Addig menjünk, amíg vissza nem érünk egy olyan csúcsba, ahol már jártunk (ez biztosan bekövetkezik, mert G véges). Ekkor sohasem juthatunk el a K_1 kör valamelyik csúcsába, mert ekkor onnan C_1 -be is eljuthatnánk, s ezáltal a kiinduló rossz él benne lenne egy körben, ami ellentmondás. Így a visszacsatlakozásig bejártunk egy K_1 -től diszjunkt K_2 kört. Ezután általában a K_i körnek ($i \geq 2$) vegyük egy attól a csúctól különböző csúcsát, melynél beérkeztünk a K_i körbe, majd egy ebből kiinduló rossz élt, s ezen induljunk el a fenti módszer szerint. Kapunk egy K_i -től diszjunkt K_{i+1} kört. Ez minden K_j ($j < i$) körtől is diszjunkt, mert ezek egy csúcsába se juthatunk el a K_i körből, hiszen ekkor ezekből a K_i körbe is visszajuthatnánk, ezzel egy rossz élt egy körbe foglalva, ami nem lehetséges. Így pedig végtelen sok diszjunkt körnek kellene lennie G -ben, ami nem lehetséges, hiszen G véges.

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát a feladat állítását bebizonyítottuk.