

I. megoldás. a) Ha minden számjegy kisebb, mint 5, akkor természetesen a két szám kétszeresében a számjegyek összege egyenlő, hiszen a számjegyek kétszeresét bármilyen sorrendben összeadhatjuk. Ez akkor sem változik, ha néhány számjegy legalább 5, hiszen ilyenkor a számjegy kétszerese legalább 10, de maximum 18, tehát legfeljebb 1 az átvitel az előző számjegy kétszereséhez, ami szintén legfeljebb 18. Tehát egyik 5-nél nagyobb számjegy sem változtatja meg a többi számjegy átvitelét, így minden számjegy kétszerese ugyanannyival növeli a számjegyek összegét $2a$ -ban és $2b$ -ben.

b) Egy páros számjegy fele ugyanannyival növeli $a/2$ és $b/2$ számjegyeinek az összegét, mert mindig az eredetivel azonos helyiértéken álló, egyjegyű szám. Ezek az egyjegyű számok a következők lehetnek: 0; 1; 2; 3; 4. Egy páratlan számjegy felének értéke 0,5; 1,5; 2,5; 3,5 vagy 4,5. Akármelyikről van szó, az 5-öst hozzáadva az eggyel kisebb helyiértékű számjegyhez (a szám páros, ezért az utolsó számjegy nem lehet páratlan, így az 5-ös valóban átvitelre kerül) nem kaphatunk 9-nél nagyobb számot, így a páratlan számjegyek is ugyanannyival járulnak hozzá $a/2$ és $b/2$ értékéhez.

II. megoldás. b) Először azt bizonyítjuk be, hogy $5a$ és $5b$ számjegyeinek összege egyenlő lesz.

Szorozzuk meg $a = \overline{a_n \dots a_1 a_0}$ -t 5-tel írásban. Először a_0 -t megszorozzuk 5-tel. Ha $a_0 < 2$, akkor $5a$ utolsó számjegye $5a_0$. Ha $a_0 \geq 2$, akkor először $5a_0$ -al nő a számjegyek összege, aztán $10k - k = 9k$ -val csökken, ahol $k = \left\lfloor \frac{5a_0}{10} \right\rfloor$, azaz az átviendő maradék. Összesen $5a_0 - 9k$ a hozzájárulás a számjegyek összegéhez. Most a tízesátlépés miatt k -t hozzá kell majd adni $5a_1$ -hez. Mivel $5a_1$ utolsó számjegye 0 vagy 5, és nyilván $0 \leq k \leq 4$, azért k hozzáadása miatt nem lesz új tízesátlépés. Azt kaptuk tehát, hogy $5a$ számjegyeinek az összege független az a számjegyeinek sorrendjétől.

Visszatérve az eredeti feladatra: $5a$ az $\frac{a}{2}$ 10-szerese, azaz úgy kapjuk $\frac{a}{2}$ -ből, hogy a végére írunk egy nullát. Emiatt a számjegyeinek összege egyenlő $\frac{a}{2}$ számjegyeinek összegével. Mivel $5a$ és $5b$ számjegyeinek összege egyenlő, azért $\frac{a}{2}$ -ben és $\frac{b}{2}$ -ben is egyenlő a számjegyek összege.