

Megoldás. A nevezők miatt $x \neq 1$, $y \neq 1$. Mivel $x + y = 1$, az $x = 1 - y$, illetve az $y = x - 1$ helyettesítésekkel a következő átalakításokat tudjuk elvégezni:

$$\begin{aligned}
 & \frac{x}{y^3 - 1} + \frac{y}{1 - x^3} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = \\
 &= \frac{1 - y}{(y - 1)(y^2 + y + 1)} + \frac{1 - x}{(1 - x)(x^2 + x + 1)} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = \\
 &= -\frac{1}{y^2 + y + 1} + \frac{1}{x^2 + x + 1} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = \\
 &= \frac{-x^2 - x - 1 + y^2 + y + 1}{(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = \\
 &= \frac{(y - x) \overbrace{(y + x)}^1 + y - x}{(y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1)} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = \frac{2(y - x)}{x^2 y^2 + 3} + \frac{2(x - y)}{x^2 y^2 + 3} = 0.
 \end{aligned}$$

Felhasználtuk, hogy

$$\begin{aligned}
 (y^2 + y + 1)(x^2 + x + 1) &= x^2 y^2 + x^2 y + x^2 + x y^2 + x y + x + y^2 + y + 1 = \\
 &= x^2 y^2 + x^2 + x y \overbrace{(x + y)}^1 + x y + y^2 + \overbrace{x + y}^1 + 1 = \\
 &= x^2 y^2 + \overbrace{(x + y)^2}^1 + 2 = x^2 y^2 + 3.
 \end{aligned}$$

Vagyis az eredeti kifejezés értéke mindig 0, ezért állandó.