

**Megoldás.** Jelölje  $f(n)$  az  $1, 2, \dots, n$  számok között fellépő kettőshatvány különbségek számát,  $F(n)$  pedig legyen az  $n$  különböző egész között fellépő kettőshatvány különbségek maximális száma. Ezzel a feladat állítása  $F(n) = f(n)$  alakot ölt, amit  $n$  szerinti teljes indukcióval bizonyítunk. Az  $n = 1$  eset triviális, hisz  $F(1) = f(1) = 0$ .

Tegyük fel tehát, hogy  $n < N$  esetén már igazoltuk az  $F(n) = f(n)$  egyenlőséget. Célunk az  $F(N) = f(N)$  bizonyítása. Legyenek tehát az  $a_1 < a_2 < \dots < a_N$  egészek olyanok, hogy a belőlük képezhető kettőshatvány különbségek száma  $F(N)$ , és az ilyen tulajdonságú sorozatok közül olyat válasszunk, amire az  $a_N - a_1$  különbség a lehető legkisebb.

Feltehető, hogy az  $a_i$  számaink között van páros. Ha ugyanis minden  $a_i$  páratlan, akkor az  $\{a_i + 1 : 1 \leq i \leq N\}$  halmazból a képezhető kettőshatvány különbségek száma  $F(N)$ , és a legnagyobb és legkisebb szám különbsége sem változott. Ha netán minden  $a_i$  páros, akkor az egész számokból álló  $\{a_i/2 : 1 \leq i \leq N\}$  halmazból is  $F(N)$  kettőshatvány különbség képezhető, ráadásul a legnagyobb és legkisebb szám különbsége csökkent. Mivel az  $a_1, a_2, \dots, a_N$  sorozatot úgy választottuk, hogy ez a különbség minimális legyen, az  $a_1, a_2, \dots, a_N$  számok között bizonyosan van páros és páratlan is. Legyen tehát  $k$  a páros és  $N - k$  a páratlan  $a_i$ -k száma, ahol  $1 \leq k < N$ . Az is feltehető, hogy  $k \leq \frac{N}{2}$ , ha ugyanis ez nem így volna, akkor minden  $a_i$ -t eggyel megnövelve olyan sorozatot kapnánk, amiben kevesebb a páros szám mint a páratlan, a kettőshatvány különbségek száma  $F(N)$  és a legnagyobb és legkisebb szám különbsége sem változik ettől.

A sorozatunkban fellépő kettőshatvány különbségek háromfélék lehetnek. Két páros szám között fellépő kettőshatvány különbségből az indukciós feltevés szerint legfeljebb  $f(k)$  lehet, ami megegyezik a  $2, 4, \dots, 2k$  számok között fellépő kettőshatvány különbségek számával. Hasonlóan, a páratlan  $a_i$ -k szintén az indukciós feltevés szerint legfeljebb  $f(N - k)$  kettőshatvány különbséget határoznak meg, és ez éppen az

$1, 3, 5, \dots, 2(N - k) - 1$  számok között fellépő kettőshatvány különbségek száma. Végül a páros és páratlan  $a_i$ -k között fellépő kettőshatvány különbségek páratlanok, így 1-gyel egyenlők. Minden páros  $a_i$  legfeljebb két ilyen különbségben szerepelhet, ezért legfeljebb  $2k$  lehet ezekből, de az is igaz, hogy minden ilyen különbség  $a_{i+1} - a_i$  alakú, amiből összesen  $N - 1$  van. Figyeljük meg, hogy a  $\{2, 4, \dots, 2k\}$  és  $\{1, 3, 5, \dots, 2(N - k) - 1\}$  halmazokból egy-egy elemet kiválasztva pontosan  $2k$ -féleképpen választhatunk szomszédos számokat, kivéve, ha  $k = \frac{N}{2}$ , amikor csak  $N - 1$  ilyen választás lehetséges.

Azt kaptuk, hogy az általunk vizsgált  $\{a_1, a_2, \dots, a_N\}$  halmazban legfeljebb annyi kettőshatvány különbség lép fel, mint a  $H = \{1, 2, 3, \dots, 2k, 2k + 1, 2k + 3, 2k + 5, \dots, 2(N - k) - 1\}$  halmazban. Ezért az indukciós lépés befejezéséhez azt kell megmutatnunk, hogy a  $H$  halmaz legfeljebb annyi kettőshatvány különbséget határoz meg, mint az  $[N] := \{1, 2, \dots, N\}$  halmaz. Ha  $k = \frac{N}{2}$ , akkor  $H = [N]$ , és nincs mit bizonyítanunk. A továbbiakban feltesszük tehát, hogy  $k < \frac{N}{2}$ .

Tegyük észre, hogy  $[2k + 1] := \{1, 2, \dots, 2k + 1\}$  részhalmaza  $H$ -nak és  $[N]$ -nek is, ezért a  $[2k + 1]$  halmazon belül fellépő kettőshatvány különbségek nem okoznak eltérést.

A  $H \setminus [2k + 1] = \{2k + 3, 2k + 5, \dots, 2(N - k) - 1\}$ , illetve  $[N] \setminus [2k + 1] = \{2k + 2, 2k + 3, \dots, N\}$  halmazok egyaránt  $f(N - 2k - 1)$  kettőshatvány különbséget határoznak meg. Annyit kell tehát bizonyítanunk, hogy a  $[2k + 1]$  halmaz és a  $H \setminus [2k + 1]$  halmaz elemei között fellépő kettőshatvány különbségek száma nem lehet több, mint a  $[2k + 1]$  halmaz és az  $[N] \setminus [2k + 1]$  halmaz elemei között fellépő kettőshatvány különbségek száma. Ha azonban az  $x \in [2k + 1]$  és az  $y \in H \setminus [2k + 1]$  számok különbsége kettőshatvány, akkor mivel e különbség legalább 2 és  $y$  páratlan, ezért  $x$ -nek is annak kell lennie. Így a  $(2k + 1)$ -ből „felére kicsinyített”

$$x' := 2k + 1 - \frac{1}{2}(2k + 1 - x) \quad \text{és} \quad y' := 2k + 1 + \frac{1}{2}(y - (2k + 1))$$

számok a  $[2k + 1]$ , illetve  $[N] \setminus [2k + 1]$  halmazok olyan elemei, amik különbsége

$$y' - x' = 2k + 1 - (2k + 1) + \frac{1}{2}(y - (2k + 1) + 2k + 1 - x) = \frac{1}{2}(y - x)$$

sintén kettőshatvány.

Azt kaptuk, hogy minden  $H$ -beli kettőshatvány különbséghez találtunk egy-egy különböző kettőshatvány különbséget  $[N]$ -ben, és ezzel az indukciós lépést igazoltuk, a feladat állítását pedig bebizonyítottuk.  $\square$

*Megjegyzés.* 1. Nem igaz, hogy ha az  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  sorozat maximális számú kettőshatvány különbséget határoz meg, akkor számtani sorozatról van szó: az  $1, 2, 3, 4$  és az  $1, 2, 3, 5$  sorozatok mindegyikéből ötféleképp lehet kettőshatvány különbséget képezni.

2. A feladat állítása 2 helyett más pozitív egész szám hatványaira is igaz, de ennek bizonyítása a feladatbeli állításnál valamivel bonyolultabb.