

I. megoldás. $n = 1$ -re $2^4 + 1 = 17$, $n = 2$ -re $2^8 - 1 = (2^4 + 1)(2^4 - 1) = 17 \cdot 15$.

Sejtésünk az, hogy ha n páratlan, akkor 17 a $(2^{4n} - 1)$ -nek, ha pedig páros, akkor a $(2^{4n} + 1)$ -nek osztója. Sejtésünket teljes indukcióval bizonyítjuk.

Legyen $n = 2k + 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Láttuk, hogy $n = 1$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n = (2k + 1)$ -re is igaz, azaz

$$2^{4(2k+1)} + 1 = 2^{8k+4} + 1 = 17 \cdot x,$$

ahol x egész. Belátjuk, hogy akkor $n = [2(k + 1) + 1]$ -re is igaz, vagyis a tulajdonság öröklődik.

$$\begin{aligned} 2^{4[2(k+1)+1]} + 1 &= 2^{8k+4} \cdot 2^8 + 1 = (17x - 1) \cdot 2^8 + 1 = 17 \cdot 2^8 x - 2^8 + 1 = \\ &= 17 \cdot 256 \cdot x - 255 = 17 \cdot 256 \cdot x - 17 \cdot 15, \end{aligned}$$

s ez osztható 17 -tel.

Legyen most $n = 2k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$). $n = 2$ -re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy $n = 2k$ -ra is igaz: $2^{4n} - 1 = 2^{8k} - 1 = 17 \cdot y$, és legyen $n = 2(k + 1)$, ekkor

$$2^{4(2(k+1))} - 1 = 2^{8k} \cdot 2^8 - 1 = (17y + 1) \cdot 2^8 - 1 = 17 \cdot 256 \cdot y + 17 \cdot 15.$$

Valóban, ez is osztható 17 -tel. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. $2^{4n} = (2^4)^n = 16^n$.

Legyen n páros, ekkor $n = 2k$, és

$$2^{4n} - 1 = 16^{2k} - 1^{2k} = (16 + 1)(16^{2k-1} - 16^{2k-2} + 16^{2k-3} - \dots + 16 - 1) = 17 \cdot a,$$

ahol $a \geq 1$ és egész, amennyiben $k \geq 1$. Vagyis ha n pozitív páros szám, akkor $17 \mid 2^{4n} - 1$.

Legyen n páratlan, ekkor $n = 2k + 1$, és

$$2^{4n} + 1 = 16^{2k+1} - 1^{2k+1} = (16 + 1)(16^{2k} - 16^{2k-1} + 16^{2k-2} - \dots - 16 + 1) = 17 \cdot b,$$

ahol $b \geq 1$ és egész, amennyiben $k \geq 1$. Vagyis ha n pozitív páratlan szám, akkor $17 \mid 2^{4n} + 1$.