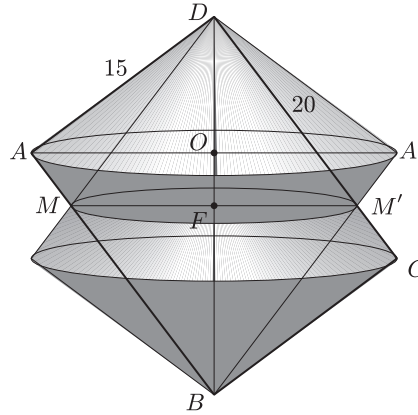


Megoldás. Jelöljük a téglalap csúcsait A, B, C és D -vel az *ábra* szerint, oldalai $AB = 20, BC = 15$. Forgassuk meg a téglalapot a BD átlója körül. Az A 180° -os elforgatottja A' . Állítsunk a téglalap síkjában a BD átló F felezőpontjában merőlegest az átlóra. Messe az egyenes az AB oldalt az M , a CD oldalt az M' pontban. Nyilván az FM távolság egyenlő az FM' távolsággal, azaz M tükörképe a BD átlóra M' . Az F pontban a BD -re állított merőleges sík szimmetriasíkja a forgástestnek, ezért elegendő ezen sík egyik oldalán keletkezett forgástestet vizsgálni. A teljes térfogatot ezen forgástest térfogatának kétszerese adja.



A forgatáskor keletkezett egy $\frac{AA'}{2} = r$ sugarú és $DO = m$ magasságú forgáskúp (O az AA' és BD metszéspontja), és egy csonkakúp, melyben az alapkörök sugara $FM = r_1$, $AO = r_2$, a magassága $FO = m'$. Számítsuk ki a szükséges adatokat.

A téglalap átlója $BD = \sqrt{400 + 225} = 25$. DO hosszát az ABD derékszögű háromszögből a befogótétel segítségével számítjuk ki:

$$DA = \sqrt{DO \cdot DB}, \quad \text{azaz} \quad 15 = \sqrt{DO \cdot 25}, \quad \text{innen} \quad DO = \frac{225}{25} = 9$$

a kúp m magassága.

A kúp alapkörének sugara $r = AO = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$. A kúp térfogata:

$$V_{\text{kúp}} = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{9 \cdot 12^2 \pi}{3} = 432 \pi.$$

A csonkakúla magassága: $m' = FO = \frac{25}{2} - 9 = \frac{7}{2}$. Az r_1 sugarat a BFM és BOA hasonló háromszögekből határozzuk meg: $\frac{FM}{AO} = \frac{BF}{BO}$, innen

$$r_1 = FM = AO \cdot \frac{BF}{BO} = 12 \cdot \frac{12,5}{12,5 + 3,5} = 12 \cdot \frac{12,5}{16} = \frac{3}{4} \cdot 12,5 = 9,375$$

és $r_2 = AO = 12$.

A csonkakúla térfogata:

$$V_{\text{csonkakúla}} = \frac{\pi m'}{3} (r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2) = \frac{\frac{7}{2} \pi}{3} (9,375^2 + 9,375 \cdot 12 + 12^2),$$

$$V_{\text{forgástest}} = \pi \cdot \left[864 + \frac{7}{3} (9,375^2 + 9,375 \cdot 12 + 12^2) \right] \approx 5238,85.$$