

I. megoldás. A kérdés ugyanaz, mintha azt kérdeznénk, hogy hányféleképpen lehet a 180-at három pozitív egész szám összegeként felírni, ha a számok sorrendje nem számít.

Ha számítana a sorrend is, akkor az összes lehetőség száma $\binom{179}{2}$ lenne, hiszen ha leírunk egymás mellé 180 darab 1-et, akkor a szomszédosak közötti 179 hely közül kell kettőt kiválasztani, hogy a 180 darab 1-et három részre osszuk.

Ha $a + b + c = 180$, és a, b, c különböző pozitív egész számok, akkor ennek a három számnak $3! = 6$ -féle különböző sorrendje van. Tehát a különböző alakú, nem egyenlő szárú háromszögek számát x -szel jelölve, $6x$ darab ilyen háromszög van, ha számít a szögek sorrendje. Ha $a + a + b = 180$, és a, b különböző pozitív egész számok, akkor ennek a három számnak 3-féle különböző sorrendje van. Tehát az egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú, különböző alakú háromszögek számát y -nal jelölve, $3y$ ilyen háromszög van, ha számít a szögek sorrendje. Egyenlő oldalú háromszög 1 van.

Ezek alapján:

$$(1) \quad \binom{179}{2} = \frac{179 \cdot 178}{2} = 15\,931 = 6x + 3y + 1.$$

Az egyenlő szárú, de nem egyenlő oldalú háromszögek száma pedig 88, hiszen az alapon fekvő szögek nagysága fokban az 1-től 89-ig terjedő egész számok közül a 60 kivételével bármi lehet. Tehát $y = 88$. Ezt behelyettesítve (1)-be kapjuk, hogy $15\,931 = 6x + 3 \cdot 88 + 1$, ahonnan $x = 2611$.

Így a különböző alakú háromszögek száma: $x + y + 1 = 2611 + 88 + 1 = 2700$.

Megjegyzés. Ha azt szeretnénk megszámolni, hogy hányféleképpen lehet $6k$ -t felbontani három pozitív egész szám összegére, akkor hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy

$$\frac{(6k-1)(6k-2)}{2} = 6x + 3y + 1, \quad \text{amiből} \quad 18k^2 - 9k = 6x + 3y,$$

ahol x a három különböző, y pedig a két különböző számra való felbontások számát jelöli. Másrészt szintén az I. megoldás gondolatmenetével: $3k - 1 = y + 1$, amiből $y = 3k - 2$. Ezt behelyettesítve az előbbi egyenletbe és rendezve kapjuk, hogy $x = 3k^2 - 3k + 1$. Végül, a keresett felbontások száma:

$$x + y + 1 = 3k^2 - 3k + 1 + 3k - 2 + 1 = 3k^2.$$

II. megoldás. Legyenek egy háromszög szögei általában $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Számoljuk össze a háromszögeket a legkisebb szög, α nagysága szerint. (A „fok” mértékegységet nem írjuk le.)

Tudjuk, hogy $\alpha \leq \beta \leq \left[90 - \frac{\alpha}{2}\right]$, hiszen ha β ennél nagyobb lenne, akkor γ is, de ekkor a három szög összege nagyobb lenne 180-nál.

Tehát adott $\alpha = k$ esetén a háromszögben β nagyságára $\left(\left[90 - \frac{k}{2}\right] - k\right) + 1$ lehetőség van. Mivel α legfeljebb 60, azért az összes háromszög száma:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^{60} \left(\left[90 - \frac{\alpha}{2}\right] - \alpha \right) + 1 &= \left(\sum_{\alpha=1}^{60} \left[90 - \frac{\alpha}{2}\right] \right) - \sum_{\alpha=1}^{60} \alpha + 60 = \\ &= 2 \cdot (89 + 88 + \dots + 60) - (1 + 2 + \dots + 60) + 60 = 2 \cdot \frac{30 \cdot 149}{2} - \frac{61 \cdot 60}{2} + 60 = \\ &= 4470 - 1830 + 60 = 2700. \end{aligned}$$

III. megoldás. Legyenek egy háromszög szögei általában $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Számoljuk össze a háromszögeket a középső szög, β nagysága szerint. (A „fok” mértékegységet nem írjuk le.)

β legalább 1, és legfeljebb $\left[\frac{180-1}{2}\right] = 89$.

I. eset: $1 \leq \beta \leq 60$, ekkor $1 \leq \alpha \leq \beta$, amiből γ már meghatározott. Ez α -ra, és így a háromszögek számára

$$\sum_{\beta=1}^{60} \beta = 1 + 2 + \dots + 59 + 60 = \frac{60(60+1)}{2} = 1830$$

lehetőség.

II. eset: $61 \leq \beta \leq 89$, ekkor $\beta \leq \gamma \leq 180 - (\beta + 1)$, hiszen α értéke legalább 1. Mivel α ebből már meghatározott, azért γ és így a háromszögek száma

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=61}^{89} ((180 - (\beta + 1)) - \beta) + 1 &= \sum_{\beta=61}^{89} 180 - 2\beta = \\ &= (89 - 61 + 1) \cdot 180 - 2 \cdot \frac{(89 - 61 + 1) \cdot (89 + 61)}{2} = 5220 - 4350 = 870. \end{aligned}$$

Ez összesen $1830 + 870 = 2700$ lehetőség, tehát ennyi háromszög van.

Megjegyzés. A legnagyobb szög szerint is össze lehet számolni a háromszögeket, bár kicsit bonyolultabb módon.

IV. megoldás. Jelölje a_i , b_i és c_i rendre azt, hogy hányféleképpen lehet az i pozitív egész számot egy, két, illetve három pozitív egész szám összegére felbontani, ahol nem számít a tagok sorrendje.

Nyilván $a_i = 1$ minden i esetén.

Az is teljesül, hogy $b_{2k} = b_{2k+1} = k$, hiszen a kisebbik szám mindkét esetben 1 és k közötti egész.

Ha egy 3-nál nagyobb számot felbontunk három pozitív egész összegére: $k = x + y + z$, akkor $k - 3 = (x - 1) + (y - 1) + (z - 1)$, ahol a három tag nemnegatív. Vagyis a 3-mal kisebb számnak egy olyan felbontását kaptuk, ami vagy egy tagból áll (ha x , y és z közül pontosan kettő értéke 1); vagy két tagból áll (ha a három szám közül pontosan egy értéke 1); vagy három tagból áll (ha mindhárom szám értéke nagyobb 1-nél).

Megfordítva: a $k - 3$ számnak valamely egy-, két- vagy háromtagú felbontásából megkapjuk k egy háromtagú felbontását.

A fentiek alapján teljesül, hogy:

$$c_k = a_{k-3} + b_{k-3} + c_{k-3}.$$

Legyen most $k = 6n$ alakú. Ekkor c_{6n-3} -at tovább bontva, majd az eredményben a c_i tagokat mindig tovább bontva kapjuk, hogy

$$c_{6n} = a_{6n-3} + b_{6n-3} + a_{6n-6} + b_{6n-6} + \dots + a_6 + b_6 + a_3 + b_3 + c_3.$$

Mivel a 3 csak egyféleképpen bontható fel három pozitív egész szám összegére ($3 = 1 + 1 + 1$), $c_3 = 1$. Továbbá $b_3 = 1$, $b_{6k} = 3k$ és $b_{6k+3} = 3k + 1$. Ezek alapján a tagokat rendezve:

$$\begin{aligned} c_{6n} &= (a_3 + a_6 + \dots + a_{6n-6} + a_{6n-3}) + (b_3 + b_6 + \dots + b_{6n-6} + b_{6n-3}) + c_3 = \\ &= (2n - 1) + ((1) + (3 \cdot 1) + (3 \cdot 1 + 1) + (3 \cdot 2) + (3 \cdot 2 + 1) + \dots + \\ &\quad + (3 \cdot (n - 1)) + (3 \cdot (n - 1) + 1)) + 1 = \\ &= (2n - 1) + (n \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot (1 + 2 + \dots + (n - 1))) + 1 = \\ &= 2n - 1 + n + 6 \cdot \frac{n(n - 1)}{2} + 1 = 3n + 3n(n - 1) = 3n^2. \end{aligned}$$

Ez $n = 30$ esetén $3 \cdot 30^2 = 2700$ felbontást jelent, ennyi a megfelelő háromszögek száma.