

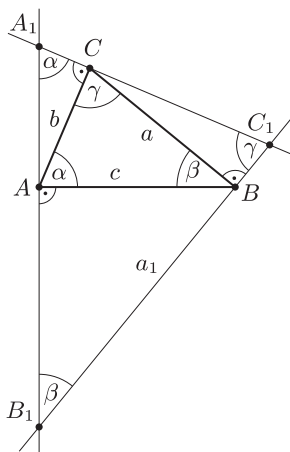
Megoldás. Három esetet kell vizsgálnunk: a hegyesszögű, a derékszögű és a tompaszögű háromszög esetét. Jelöljük az új háromszög csúcsait A_1 , B_1 és C_1 -gyel.

Az $A_1B_1C_1$ háromszög mindhárom esetben hasonló az eredeti ABC háromszöghöz, mert szögeik egyenlőek (mértékes szárú szögpárok). Legyen a két háromszög hasonlóságának aránya λ .

1. Ha a háromszög hegyesszögű (1. ábra):

$$\lambda = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{a_1}{a} = \frac{K}{k}, \quad a_1 = B_1B + BC_1,$$

a BCC_1 háromszögben $\operatorname{ctg} \gamma = \frac{BC_1}{a}$, az ABB_1 háromszögben $\sin \beta = \frac{c}{BB_1}$.



1. ábra

Ezek alapján:

$$\frac{a_1}{a} = \frac{B_1B}{a} + \frac{BC_1}{a} = \frac{c}{a \cdot \sin \beta} + \operatorname{ctg} \gamma.$$

A szinusz-tétel alapján az első tag:

$$\begin{aligned} \frac{c}{a} \cdot \frac{1}{\sin \beta} &= \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} \cdot \frac{1}{\sin \beta} = \frac{\sin [180^\circ - (\alpha + \beta)]}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \alpha \cdot \sin \beta} = \\ &= \frac{\cos \beta}{\sin \beta} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha, \end{aligned}$$

vagyis

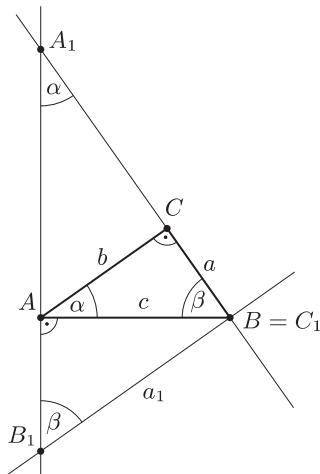
$$\frac{a_1}{a} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{K}{k}.$$

2. Derékszögű háromszögben (2. ábra):

$$\lambda = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{a_1}{a} = \frac{K}{k},$$

az ABB_1 háromszögben

$$\sin \beta = \frac{c}{a_1}, \quad \text{vagyis} \quad \frac{a_1}{a} = \frac{c}{a \cdot \sin \beta}.$$



2. ábra

Az előző esethez hasonlóan belátható, hogy

$$\frac{c}{a \cdot \sin \beta} = \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha.$$

Mivel $\gamma = 90^\circ$, azért $\operatorname{ctg} \gamma = 0$, így

$$\frac{a_1}{a} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{K}{k}.$$

3. Tompaszögű háromszögben (3. ábra):

$$\lambda = \frac{B_1 C_1}{BC} = \frac{a_1}{a} = \frac{K}{k}, \quad a_1 = B_1 B - BC_1,$$

az ABB_1 háromszögben $\sin \beta = \frac{c}{B_1B}$, a BCC_1 háromszögben

$$\operatorname{ctg}(180^\circ - \gamma) = \frac{BC_1}{a} = -\operatorname{ctg} \gamma,$$

amiből

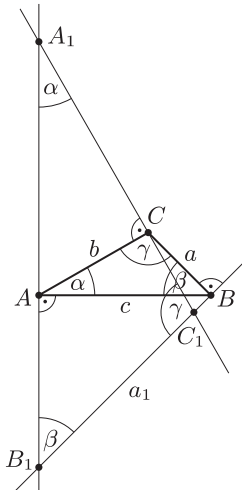
$$\frac{a_1}{a} = \frac{B_1 B}{a} - \frac{BC_1}{a} = \frac{c}{a \cdot \sin \beta} - \operatorname{ctg}(180^\circ - \gamma).$$

Hasonlóan az 1. esethez:

$$\frac{c}{a \cdot \sin \beta} = \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha,$$

vagyis összegezve

$$\frac{a_1}{a} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma = \frac{K}{k}.$$



3. ábra

Az állítást mindhárom esetben beláttuk, így az bármely háromszögben igaz.