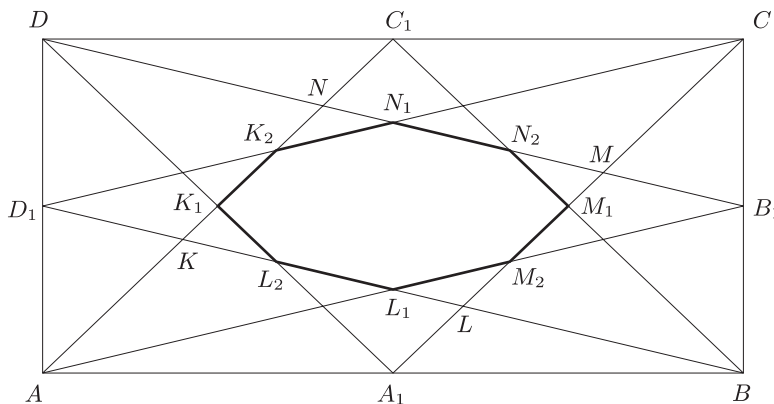


**I. megoldás.** Az adott  $ABCD$  téglalap területét jelölje  $T$ , az oldalak felezőpontjai legyenek  $A_1, B_1, C_1, D_1$ . A  $K, K_1$  és  $K_2$  pontok jelöljék rendre az  $AC_1$  szakasznak a  $BD_1, DA_1$  és  $CD_1$  szakaszokkal való metszéspontjait. Hasonlóan képezzük az  $L, L_1, L_2$ , valamint az  $M, M_1, M_2$ , illetve az  $N, N_1, N_2$  pontokat.



Szemköztes oldalainak párhuzamossága miatt az  $AA_1CC_1$  négyszög paralelogramma, melynek magassága megegyezik az  $ABCD$  téglalap  $AB$  oldalához tartozó magasságával, az alapja pedig fele az adott téglalap  $AB$  alapjának; ezért a paralelogramma területe  $\frac{T}{2}$ .

Hasonlóan a  $KLMN$  négyszög ugyancsak paralelogramma. Ennek a paralelogrammának a magassága megegyezik az  $AA_1CC_1$  paralelogramma  $A_1C$  és  $AC_1$  oldalai közötti magassággal. Számítsuk ki a paralelogramma  $KN$  oldalát: a  $D_1K, MB_1$  és  $C_1L$  szakaszok az  $AND, CLB$  és  $DMC$  háromszögek középvonalai. Ebből következik, hogy  $AK = KN = LM = MC = 2NC_1$ . Tudjuk még, hogy  $NAD\triangle \sim NC_1L_1\triangle$  és így

$$\frac{C_1N}{AN} = \frac{C_1L_1}{AD} = \frac{1}{4}, \quad \text{tehát} \quad KN = \frac{2}{5}AC_1.$$

Ezért a  $KLMN$  paralelogramma területe  $\frac{T}{5}$ .

A  $K_1$  pont az  $AA_1C_1D$  téglalap átlóinak metszéspontja, ezért  $AK_1 = K_1C_1$ .

A  $K_2$  pont az  $ACD$  háromszög  $AC_1$  és  $CD_1$  súlyvonalainak a metszéspontja, tehát az  $ACD$  háromszög súlypontja, ezért  $AK_2 = 2K_2C_1$ .

Ezekből kapjuk, hogy

$$KK_1 = AK_1 - AK = \frac{1}{2}AC_1 - KN = \frac{5}{4}KN - KN = \frac{1}{4}KN$$

és

$$K_2N = AN - AK_2 = 2KN - \frac{2}{3}AC_1 = 2KN - \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2}KN = \frac{1}{3}KN.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy  $KL_2 = \frac{KL}{3}$ . Ezért:

$$\begin{aligned} T_{KK_1L_2} &= \frac{1}{2}KK_1 \cdot KL_2 \cdot \sin \angle K_1KL_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}KN \cdot \frac{1}{3} \cdot KL \cdot \sin \angle NKL = \\ &= \frac{1}{12}T_{NKL} = \frac{1}{24}T_{KLMN} = \frac{1}{120}T. \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy  $T_{LL_1M_2} = T_{MM_1N_2} = T_{NN_1K_2} = \frac{T}{120}$ .

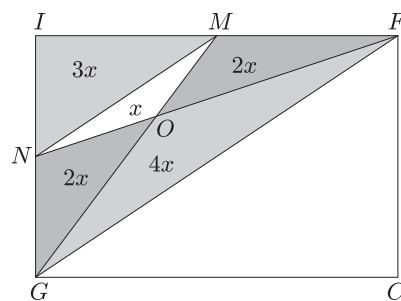
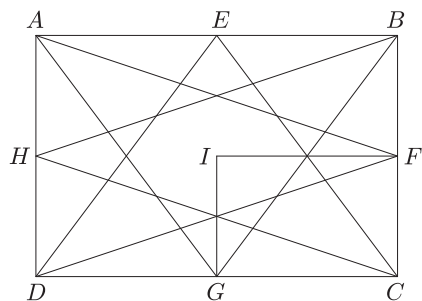
Így végül:

$$T_{K_1L_2L_1M_2M_1N_2N_1K_2} = \frac{1}{5}T - 4 \cdot \frac{1}{120}T = \frac{6-1}{30}T = \frac{1}{6}T.$$

A kapott nyolcszög területe tehát  $\frac{1}{6}$  része az eredeti téglalap területének.

**II. megoldás.** A téglalap két oldalfelező merőlegese (melyeknek metszéspontja  $I$ ) négy egybevágó részre osztja a téglalapot. Elég az egyik ilyen részt megvizsgálni.

Nyilván  $BG$  felezi az  $IF$ ,  $HC$  pedig az  $IG$  szakaszt.



Az  $IFG$  háromszög súlyvonalai harmadolják egymást, és felezik a háromszög területét. Legyen az  $OMN\triangle$  területe  $x$ . Mivel  $2NO = OF$ , azért  $2t_{NOM} = t_{FMO} = 2x$ . Mivel  $MN$  az  $INF\triangle$  súlyvonala, azért  $t_{INM} = t_{OMN} + t_{OFM} = 3x$ . Innen  $t_{NGF} = t_{INF} = 6x$ .

A keresett arány:

$$\frac{3x + x}{2 \cdot (3x + x + 2x + 6x)} = \frac{4x}{24x} = \frac{1}{6}.$$

A keletkezett nyolcszög területe hatodrésze a téglalap területének.