

1.1. A z magasságban levő, $\varrho(z)$ sűrűségű, A területű, dz vastagságú levegőréteg $A\varrho(z)g dz$ súlya megegyezik a levegőréteg alján és tetején mérhető nyomáskülönbségből származó $-A(p(z+dz) - p(z))$ erővel. Felhasználva, hogy $\varrho = \frac{\mu p}{RT_0}$, a nyomás magasságtól való függésére a

$$p'(z) = -\frac{\mu g}{RT_0} p(z)$$

differenciálegyenletet kapjuk, melynek megoldása

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{\mu g}{RT_0} z}.$$

1.2. Az előzőekhez hasonló érveléssel most a $p(z)$ függvényre a

$$p'(z) = -\frac{\mu g}{R(T(0) - \Lambda z)} p(z)$$

(ún. szeparálható) differenciálegyenlet vezethető le, mely a feladatban közölt segítséggel megoldható:

$$\int \frac{dp}{p} = \ln p + C_1; \quad -\frac{\mu g}{R} \int \frac{dz}{T(0) - \Lambda z} = \frac{\mu g}{R\Lambda} \ln(T(0) - \Lambda z) + C_2,$$

ahonnan

$$p(z) = p_0 \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda}}.$$

A sűrűség magasságtól való függése:

$$\varrho(z) = \frac{\mu p(z)}{RT(z)} = \frac{\mu p_0}{RT(0)} \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)}\right)^{\frac{\mu g}{R\Lambda} - 1},$$

ami akkor monoton növekedő függvény, ha a kitevő negatív, azaz ha

$$\Lambda > \frac{\mu g}{R} = 0,034 \frac{\text{K}}{\text{m}}.$$

Érdemes észrevenni, hogy kis magasságok esetén a nyomás magasságfüggése mind az 1. pontban vizsgált izoterm légkör esetén, mind pedig a most vizsgált lineáris hőmérséklet-eloszlás esetén $p(z) \approx p_0 \left(1 - \frac{\mu g z}{RT(0)}\right)$ alakú. Tehát a légkör hőmérsékletének magassággal való változása „első rendben”, kis magasságok esetén nem befolyásolja a nyomás magasságtól való függését.

2.1. A levegőcsomag állapotváltozása adiabatikus, tehát kielégíti a

$$T_{\text{csomag}} \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \text{állandó}$$

állapotegyenletet, ahol $T_{\text{csomag}}(z)$ a levegőcsomag hőmérséklete, $p(z)$ pedig a környezet és a levegőcsomag közös nyomása. Mindkét mennyiség függ a z magasságtól. Differenciáljuk az adiabatikus állapotegyenletet z szerint:

$$T'_{\text{csomag}} \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} + T_{\text{csomag}} \cdot \frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \cdot \frac{p'}{p} = 0.$$

Az előző pontban láttuk, hogy $\frac{p'}{p} = -\frac{\mu g}{RT}$, ezt felhasználva kapjuk, hogy:

$$(8) \quad T'_{\text{csomag}} = -G, \quad \text{ahol} \quad G = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} \frac{T_{\text{csomag}}}{T}.$$

2.2. Ha $T_{\text{csomag}} = T$, akkor

$$\Gamma = G|_{T_{\text{csomag}}=T} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\mu g}{R} = \frac{\mu g}{c_p} = 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{m}},$$

és a hőmérséklet a $T(z) = T(0) - \Gamma z$ módon függ a magasságtól. (Ezt a speciális esetet *adiabatikus légkörnek* hívják.)

2.3. Ha a külső hőmérséklet $T(z) = T(0) - \Lambda z$ függvény szerint változik, akkor az (8) összefüggés szerint a $T_{\text{csomag}}(z)$ függvény a következő differenciálegyenletet elégíti ki:

$$T'_{\text{csomag}}(z) = -\frac{\Gamma}{T - \Lambda z} T_{\text{csomag}}(z).$$

Az 1.2. pontban már megoldottunk egy hasonló differenciálegyenletet ($p(z)$ -re, más konstanssal), így mostani egyenletünk megoldását a megfelelő változók átírásával azonnal megkaphatjuk:

$$(9) \quad T_{\text{csomag}}(z) = T_{\text{csomag}}(0) \left(1 - \frac{\Lambda z}{T(0)} \right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}} \approx T_{\text{csomag}}(0) - \Gamma z.$$

Az utolsó közelítés $|\Lambda z| \ll T(0) \approx T_{\text{csomag}}(0)$ esetén érvényes, amikor a hatványozás közelítésére használhatjuk az $(1 + \varepsilon)^\alpha \approx 1 + \alpha\varepsilon$ formulát, amely $\varepsilon \ll 1$ esetén érvényes.

Érdemes észrevenni, hogy a kapott hőmérsékletfüggés megegyezik az adiabatikus légkör esetén kapottal. Ezen nem kell meglepődnünk, ha visszaemlékezünk az 1.2. pont végén kapott eredményünkre, mely szerint a külső nyomás (kis magasságok esetén, „első rendben”) érzéketlen a hőmérséklet magasságfüggésére, a külső hőmérséklet pedig (feltevéseink szerint) nem befolyásolja a levegőcsomag hőmérsékletét.

3.1. A levegőcsomag és a külső levegő nyomása egyensúlyban van, tehát csak hőmérsékletük eltérése okozhat sűrűségkülönbséget. Ha $z > 0$ esetén a külső levegő

$$T(z) = T(0) - \Lambda z$$

hőmérséklete kisebb, mint a levegőcsomag

$$T_{\text{csomag}}(z) = T(0) - \Gamma z$$

hőmérséklete, azaz ha $\Lambda > \Gamma$, akkor a kissé felemelkedett levegőcsomag ritkább, mint környezete, tehát tovább emelkedik; a légkör instabil. $\Lambda = \Gamma$ esetén a légkör semleges, míg $\Lambda < \Gamma$ esetén stabil.

3.2. A levegőcsomag addig a h magasságig emelkedik, ahol hőmérséklete megegyezik a külső levegő hőmérsékletével, tehát, felhasználva a (9) egyenletet,

$$T(0) - \Lambda h = T_{\text{csomag}}(0) \left(1 - \frac{\Lambda h}{T(0)} \right)^{\frac{\Gamma}{\Lambda}}.$$

Innen a h magasságra azt kapjuk, hogy:

$$(10) \quad h = \frac{T(0)}{\Lambda} \left(1 - \left(\frac{T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)} \right)^{\frac{\Gamma}{\Gamma - \Lambda}} \right) \approx \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{\Gamma - \Lambda}.$$

Az utolsó közelítés a

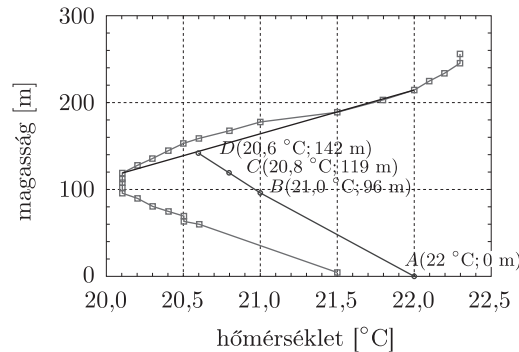
$$T_{\text{csomag}}(0) \approx T(0) \quad \text{és} \quad \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)} \ll 1$$

feltételek mellett érvényes, és a

$$\frac{T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)} = 1 - \frac{T_{\text{csomag}}(0) - T(0)}{T_{\text{csomag}}(0)}$$

átírás után a hatványozás már megismert közelítésével kapható.

4.1. A táblázatból vett adatokat ábrázolva a következő grafikont kapjuk:



6. ábra. A légkör hőmérséklete a magasság függvényében

Ennek megfelelően a légkör három rétegre osztható, a középső réteg izoterm, míg a másik kettőben közel lineárisan változik a hőmérséklet:

1. réteg	$0 \text{ m} < z < 96 \text{ m}$	$\Lambda_1 = \frac{21,5 \text{ K} - 20,1 \text{ K}}{91 \text{ m}} = 15,4 \cdot 10^{-3} \frac{\text{K}}{\text{m}}$
2. réteg	$96 \text{ m} < z < 119 \text{ m}$	$\Lambda_2 = 0 \frac{\text{K}}{\text{m}}$, izoterm szakasz
3. réteg	$119 \text{ m} < z < 215 \text{ m}$	$\Lambda_3 = \frac{20,1 \text{ K} - 22 \text{ K}}{215 \text{ m} - 119 \text{ m}} = -0,02 \frac{\text{K}}{\text{m}}$

Látható, hogy a (9) egyenlet közelítésénél használt feltételek teljesülnek, így a felemelkedő, és adiabatikusan táguló levegőcsomag hőmérséklete a külső hőmérséklettől lényegében teljesen függetlenül a $\Gamma = 10^{-2} \frac{\text{K}}{\text{m}}$ együttható szerint lineárisan csökken. Így

$$\begin{aligned} T_{\text{csomag}}(96 \text{ m}) &= 22 \text{ }^{\circ}\text{C} - 0,96 \text{ }^{\circ}\text{C} \approx 21,0 \text{ }^{\circ}\text{C} \quad \text{és} \\ T_{\text{csomag}}(119 \text{ m}) &= 22 \text{ }^{\circ}\text{C} - 1,19 \text{ }^{\circ}\text{C} \approx 20,8 \text{ }^{\circ}\text{C}. \end{aligned}$$

4.2. Látható, hogy 119 m magasan a levegőcsomag hőmérséklete még mindig $0,7 \text{ }^{\circ}\text{C}$ -kal magasabb, mint környezetéé. Alkalmazva a (10) egyenlet közelítő formuláját, azt kapjuk, hogy a levegőcsomag még további $\frac{0,7}{0,01 + 0,02} \text{ m} = 23 \text{ m}$ -t emelkedik, mire környezetével hőmérsékleti egyensúlyba kerül. Tehát a keverési magasság

$$H = 119 \text{ m} + 23 \text{ m} = 142 \text{ m},$$

és itt a hőmérséklet $T_{\text{csomag}}(H) \approx 20,6 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

5.1. Az $L \times W \times H$ méretű téglatestben levő teljes szén-monoxid mennyiség két tényező miatt változik: egyrészt a motorok által kibocsátott mennyiséggel nő, másrészt a szél által kifújt mennyiséggel csökken. Tehát

$$LWHC'(t) = M - uLHC(t).$$

5.2. A fenti lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek a $C(0) = 0$ kezdőfeltételt kielégítő megoldása:

$$C(t) = \frac{M}{LHu} \left(1 - e^{-\frac{u}{H}t} \right).$$

5.3. A fenti egyenletbe behelyettesítve a megadott adatokat, azt kapjuk, hogy a 8 órakor mérhető szén-monoxid koncentráció $C(3600 \text{ s}) = 2,3 \frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$.