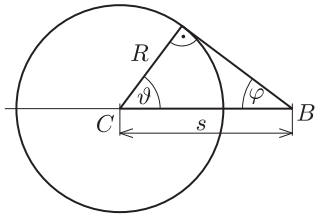
Mialatt a részecske t idő alatt a C pontból $s = vt = t\beta c$ utat megtéve a B pontba ér, a C pontban kibocsátott fény egy $R = t\dfrac{c}{n}$ sugarú gömböt ér el.

Így a hullámfront a B-ből a gömbhöz húzott érintő kúp, amely

$$\varphi = \arcsin\frac{R}{s} = \arcsin\frac{1}{\beta n}$$

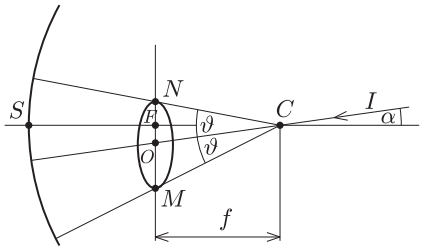
szöget zár be a részecske pályájával.



4. ábra. A hullámfront szerkesztése

Adott irányból párhuzamosan érkező fénysugarakat a homorú gömbtükör a fókuszsíkba képzi. A kép pontos helyét a tükör C geometriai középpontján áthaladó sugármenet metszi ki, amely visszaverődés után szintén keresztülhalad C-n.

Az *5. ábrán* felrajzoltuk az optikai tengelyhez képest α, $\alpha+\vartheta$ és $\alpha-\vartheta$ szögben haladó C-n átmenő fénysugarakat, melyek a fókuszsíkot az O, M és N pontban metszik. A tükör által alkotott kép (kis α, ϑ szögek esetén) egy $r = OM = ON = f\vartheta$ sugarú kör, melynek O középpontja $OF = f\alpha$ távolságra esik az F fókuszponttól.



5. ábra. A gyűrűs kép létrejötte

3.1. A $p = \dfrac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (relativisztikus) impulzus képletéből az M nyugalmi tömeg ismeretében kifejezhető a részecskék $\beta = \dfrac{v}{c}$ dimenziótlan sebessége:

$$\beta = \left(1+\left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1-\delta, \quad \text{ahol} \quad \delta = \frac{1}{2}\left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2. \tag{1}$$

Az utolsó közelítés akkor érvényes, ha $\delta \ll 1$. Ez esetünkben jó közelítéssel fennáll mindhárom részecskére:

$$\delta_{\mathrm{p}} = 4{,}42\cdot 10^{-3}, \qquad \delta_{\kappa} = 1{,}25\cdot 10^{-3}, \qquad \delta_{\pi} = 9{,}8\cdot 10^{-5}. \tag{2}$$

A Cserenkov-effektus akkor lép fel, ha a részecske v sebessége nagyobb a közegbeli $\dfrac{c}{n}$ fénysebességnél, ahol n a törésmutatót jelöli. Határesetben $v = \dfrac{c}{n_{\min}}$, tehát a minimális törésmutató, amely mellett megfigyelhető a Cserenkov-effektus:

$$n_{\min} = \frac{1}{\beta} = \sqrt{1+\left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2} \approx 1+\delta.$$

A törésmutató ismeretében a kritikus nyomás $P_{\min} = \dfrac{n_{\min}-1}{a} = \dfrac{\delta}{a}$. A számszerű eredmények:

$$P_{\min,\ \mathrm{proton}} = 16\ \mathrm{atm}, \qquad P_{\min,\ \mathrm{kaon}} = 4{,}6\ \mathrm{atm}, \qquad P_{\min,\ \mathrm{pion}} = 0{,}36\ \mathrm{atm}.$$

3.2. A gyűrűk sugara $r = f\vartheta$, ahol a sugárzási kúp ϑ félnyílásszögére a *4. ábra* alapján a $\cos\vartheta = \dfrac{1}{n\beta}$ egyenlőség teljesül. Most azt az $n_{\frac{1}{2}}$ törésmutatót keressük, amely mellett $2r_{\kappa} = r_{\pi}$, azaz $2\vartheta_{\kappa} = \vartheta_{\pi}$. Ezek felhasználásával

$$\frac{1}{n_{\frac{1}{2}}\beta_{\pi}} = \cos\vartheta_{\pi} = \cos(2\vartheta_{\kappa}) = 2\cos^2\vartheta_{\kappa} - 1 = \frac{2}{n_{\frac{1}{2}}^2\beta_{\kappa}^2} - 1.$$

Az egyenlőségsor első és utolsó eleme a

$$\beta_\pi \beta_\kappa^2 n_{\frac{1}{2}}^2 + \beta_\kappa^2 n_{\frac{1}{2}} - 2\beta_\pi = 0 \tag{3}$$

másodfokú egyenletet adja a keresett $n_{\frac{1}{2}}$ törésmutatóra, mely egyszerűen linearizálható, ha észrevesszük, hogy mind $n_{\frac{1}{2}}$, mind β_π és β_κ nagyon kicsit tér el 1-től:

$$\beta_\pi \approx 1 - \delta_\pi, \quad \beta_\kappa \approx 1 - \delta_\kappa, \quad n_{\frac{1}{2}} = 1 + \eta. \tag{4}$$

Ezeket a közelítéseket (3)-ba beírva, és csak az elsőrendű tagokat tartva meg, az adódik, hogy:

$$\eta = \frac{4\delta_\kappa - \delta_\pi}{3} = 1{,}634 \cdot 10^{-3} \quad \text{és} \quad P_{\frac{1}{2}} = \frac{\eta}{a} = 6{,}05 \text{ atm}.$$

Ezen a nyomáson a protonok nem keltenek Cserenkov-sugárzást. A törésmutató ismeretében meghatározható a kaonok és pionok által keltett sugárzási kúp félnyílásszöge:

$$\vartheta_\kappa = \arccos\left(\frac{1}{n_{\frac{1}{2}}\beta_\kappa}\right) \approx \sqrt{2(\eta - \delta_\kappa)} = 2{,}77 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 1{,}6^\circ, \tag{5}$$

$$\vartheta_\pi = 2\vartheta_\kappa = 5{,}54 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = 3{,}2^\circ.$$

(Ismert, hogy $x \ll 1$ esetén $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$. Innen $\arccos(1-y) \approx \sqrt{2y}$, ahol $y = \dfrac{x^2}{2} \ll 1$. A közelítésnél ezt az összefüggést, valamint a (4) egyenleteket használtuk fel.)

4.1. Az (1) és (5) egyenletek alapján a ϑ félnyílásszög a p impulzus függvényében

$$\vartheta(p) \approx \sqrt{2\eta - \left(\frac{Mc^2}{pc}\right)^2}, \qquad \text{így} \qquad \frac{d\vartheta}{dp} \approx \frac{(Mc^2)^2}{\vartheta \cdot (pc)^3} c. \tag{6}$$

A számértékek behelyettesítése után azt kapjuk, hogy:

$$\frac{d\vartheta_\kappa}{dp} = \frac{9{,}03 \cdot 10^{-3} \cdot c}{\text{GeV}} = \frac{0{,}52^\circ \cdot c}{\text{GeV}}, \qquad \frac{d\vartheta_\pi}{dp} = \frac{3{,}54 \cdot 10^{-4} \cdot c}{\text{GeV}} = \frac{0{,}02^\circ \cdot c}{\text{GeV}}. \tag{7}$$

(A részecskefizikában az impulzus megadására gyakran használják az $\dfrac{\text{elektronvolt}}{\text{fénysebesség}}$ mértékegységet.)

4.2. A feltételekből az impulzus bizonytalansága:

$$\Delta p < \frac{\vartheta_\pi - \vartheta_\kappa}{10(\vartheta'_\kappa + \vartheta'_\pi)} = 0{,}3 \, \frac{\text{GeV}}{c}.$$

5. Adott n törésmutatójú közegben Cserenkov-sugárzás a $v_{\min} = \dfrac{c}{n}$ sebesség fölött észlelhető. Ennél a sebességnél a mozgási energia:

$$T_{\min} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \dfrac{v_{\min}^2}{c^2}}} - Mc^2 = Mc^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right) = 0{,}51 \cdot Mc^2.$$

α-részecskékre, illetve elektronokra ezek az értékek

$$T_\alpha = 0{,}51 \cdot 3{,}8 \text{ GeV} = 1{,}94 \text{ GeV}, \qquad T_\beta = 0{,}51 \cdot 0{,}51 \text{ MeV} = 0{,}26 \text{ MeV},$$

ami azt jelenti, hogy elektronok hozták létre a Cserenkov által észlelt sugárzást.

6.1. P nyomáson $\eta = n - 1 = aP$, tehát a látható tartomány két végpontjához tartozó törésmutatók eltérése $\Delta n = \Delta\eta = 0{,}02 \cdot aP = 3{,}24 \cdot 10^{-5}$. A keresett $\Delta\vartheta$ szögeltérés a (6) egyenletben felírt ϑ szög η változó szerinti differenciálásával kapható meg:

$$\Delta\vartheta_\pi = \frac{d\vartheta_\pi(\eta)}{d\eta}\Delta\eta = \frac{\Delta\eta}{\vartheta_\pi} = 0{,}033^\circ.$$

6.2. Az előző pontban láttuk, hogy a diszperzió miatti kiszélesedés félértékszélessége $\dfrac{\Delta\vartheta_\pi}{2} = 0{,}017^\circ$. A (7) egyenlet alapján az impulzus-inhomogenitás miatti kiszélesedés

$$\frac{0{,}02^\circ \cdot c}{\text{GeV}} \cdot \frac{0{,}3 \text{ GeV}}{c} = 0{,}006^\circ,$$

ami háromszor kisebb a diszperzióhoz tartozó kiszélesedésnél. Kisebb hullámhosszon a törésmutató nagyobb, tehát a Cserenkov-kúp nyílásszöge szélesebb. Ez azt jelenti, hogy a gyűrű színe kívül kékes, középen fehér, belül pedig vöröses.