

Kiss Viktor megoldása. Helyettesítsük be $w = x = y = z = 1$ -et. Teljesül az $wx = yz$ feltétel, tehát

$$\frac{2f^2(1)}{2f(1)} = \frac{1^2 + 1^2}{1^2 + 1^2} = 1.$$

$f(1) > 0$, tehát egyszerűsíthetünk vele, kapjuk, hogy $f(1) = 1$. Ezután helyettesítsünk be $w = 1, x = a, y = z = \sqrt{a}$ -t, ahol a tetszőleges pozitív valós szám. Teljesül, hogy $wx = yz$, tehát

$$\frac{f^2(1) + f^2(a)}{2f(a)} = \frac{1 + f^2(a)}{2f(a)} = \frac{1 + a^2}{2a}.$$

$f(a)$ és a is pozitív, tehát szorozhatunk velük, kapjuk, hogy

$$a(1 + f^2(a)) = f(a)(1 + a^2),$$

azaz

$$f^2(a) \cdot a - f(a)(1 + a^2) + a = 0.$$

Ez másodfokú egyenlet $f(a)$ -ra, megoldásai a következők:

$$f(a) = \frac{1 + a^2 \pm \sqrt{(1 + a^2)^2 - 4a^2}}{2a} = \frac{1 + a^2 \pm \sqrt{1 + a^4 - 2a^2}}{2a}.$$

Ha $a \geq 1$, akkor

$$f(a) = \frac{1 + a^2 \pm \sqrt{(a^2 - 1)^2}}{2a} = \frac{1 + a^2 \pm (a^2 - 1)}{2a} = a \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{a}.$$

Ha $a < 1$, akkor

$$f(a) = \frac{1 + a^2 \pm \sqrt{(1 - a^2)^2}}{2a} = \frac{1 + a^2 \pm (1 - a^2)}{2a} = a \quad \text{vagy} \quad \frac{1}{a}.$$

Tehát megkaptuk, hogy $f(a)$ értéke tetszőleges a -ra a vagy $\frac{1}{a}$. Tegyük fel, hogy létezik $a, b \neq 1$, hogy

$$f(a) = a \quad \text{és} \quad f(b) = \frac{1}{b}.$$

Helyettesítsünk be $w = a, x = b, y = 1, z = ab$ -t.

I. eset: $f(a^2b^2) = a^2b^2$. Ekkor

$$\frac{f^2(a) + f^2(b)}{f(1^2) + f(a^2b^2)} = \frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{1 + a^2b^2} = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2b^2},$$

ami nem lehet, hiszen $b \neq 1$ és pozitív, tehát $b^2 \neq \frac{1}{b^2}$.

II. eset: $f(a^2b^2) = \frac{1}{a^2b^2}$. Ekkor

$$\frac{f^2(a) + f^2(b)}{f(1^2) + f(a^2b^2)} = \frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{1 + \frac{1}{a^2b^2}} = \frac{a^4b^2 + a^2}{a^2b^2 + 1} = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2b^2},$$

ami csak akkor teljesülhetne, ha $a^4 = 1$ teljesülne (hiszen a pozitív), de ez nem igaz. Tehát megkaptuk, hogy vagy minden $a \neq 1$ -re $f(a) = a$, vagy minden $a \neq 1$ -re $f(a) = \frac{1}{a}$ (mivel $f(1) = 1$, azért a két szóba jövő függvény az $f(x) = x$ és az $f(x) = \frac{1}{x}$). Most belátjuk, hogy mindkét függvény teljesíti a feladat feltételeit. Ha az $f(x) = x$ -et tekintjük, akkor

$$\frac{f^2(w) + f^2(x)}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

triviálisan teljesül.

Ha $f(x) = \frac{1}{x}$, akkor

$$\frac{f^2(w) + f^2(x)}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{\frac{1}{w^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}} \quad \left| \cdot \frac{w^2 x^2}{y^2 z^2} \right.$$

$$\frac{x^2 y^2 z^2 + w^2 y^2 z^2}{z^2 x^2 w^2 + y^2 x^2 w^2} = \frac{(x^2 + w^2) y^2 z^2}{(y^2 + z^2) x^2 w^2} = \frac{x^2 + w^2}{y^2 + z^2} \quad (\text{hiszen } wx = yz).$$

Tehát csak az $f(x) = x$ és $f(x) = \frac{1}{x}$ függvények teljesítik a feladat feltételeit, és ezek valóban teljesítik azokat.