

Koráncsi Dániel megoldása. Legyen $a = \frac{x}{1-x}$, $b = \frac{y}{1-y}$, $c = \frac{z}{1-z}$.

$$\begin{aligned} abc &= \frac{xyz}{(1-x)(1-y)(1-z)} = \frac{1}{(1-x)(1-y)(1-z)} = \\ &= (a+1)(b+1)(c+1), \end{aligned}$$

azaz

$$(1) \quad (a+1)(b+1)(c+1) - abc = ab + ac + bc + a + b + c + 1 = 0.$$

Ugyanakkor

$$(2) \quad (a+b+c+1)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 2(ab + ac + bc + a + b + c) = \\ = a^2 + b^2 + c^2 - 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $a^2 + b^2 + c^2 - 1 \geq 0$, a feladat (a) része pedig pont ezt kérdezi.

A (b) rész végtelen sok olyan (x, y, z) racionális számokból álló hármast keres, amire $xyz = 1$ és felhasználva (2)-t, $a + b + c + 1 = 0$. (1) szerint $a + b + c + 1 = 0$ akkor és csak akkor teljesül, ha $ab + ac + bc = 0$, ami ekvivalens $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ -val, mivel $abc \neq 0$. (x, y, z egyike sem 0, mivel a szorzat 1. Ekkor viszont a, b, c sem lehet 0.) Visszaírva a, b, c értékét:

$$\frac{1-x}{x} + \frac{1-y}{y} + \frac{1-z}{z} = 0.$$

3-at hozzáadva mindkét oldalhoz:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = yz + xz + xy = 3.$$

Azaz olyan számhármassokat keresünk, amire $xyz = 1$ és $xy + xz + yz = 3$, valamint $x, y, z \neq 1$.

Írjunk be x helyébe $\frac{1}{yz}$ -t. $\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + yz = 3$ racionális megoldásait keressük. Szorozva yz -vel egy másodfokú egyenletet kapunk y -ra:

$$z^2 y^2 + (1 - 3z)y + z = 0.$$

Olyan racionális z -t keresünk, amire ennek az egyenletnek a gyökei is racionálisak, ehhez az kell, hogy a diszkrimináns egy racionális szám négyzete legyen:

$$\begin{aligned} D &= (1 - 3z)^2 - 4z^3 = -4z^3 + 9z^2 - 6z + 1 = (z - 1)(-4z^2 + 5z - 1) = \\ &= (z - 1)^2(1 - 4z). \end{aligned}$$

Mivel y racionális, azért $(z - 1)^2$ egy racionális szám négyzete, így szükséges, hogy $1 - 4z$ is egy racionális szám négyzete legyen. Ehhez viszont tetszőleges racionális q -ra elég $z = \frac{1 - q^2}{4}$ -et választani. Ekkor y is racionális lesz, s így $x = \frac{1}{yz}$ is. Tehát van végtelen sok racionális megoldás. Ezzel igazoltuk a (b) részt is.