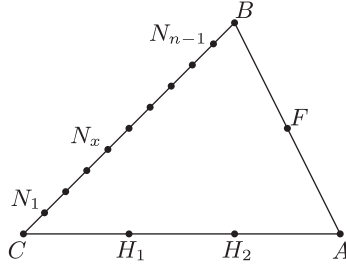


I. megoldás. Az ABC háromszög területét jelölje T . Fejezzük ki T , x és n segítségével az N_xFH_1 háromszögek és az N_xFH_2 háromszögek területét, ahol $x \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.



A BC oldalt a -val jelölve: $CN_x = \frac{a}{n} \cdot x$ és $BN_x = \frac{a}{n}(n-x)$.

Mindkét háromszög területét T és három kisebb háromszög területösszegének különbségeként írhatjuk fel:

$$(1) \quad T_{N_xFH_1\Delta} = T - (T_{AFH_1\Delta} + T_{BFN_x\Delta} + T_{CH_1N_x\Delta}),$$

$$(2) \quad T_{N_xFH_2\Delta} = T - (T_{AFH_2\Delta} + T_{BFN_x\Delta} + T_{CH_2N_x\Delta}).$$

Írjuk fel a kis háromszögek területét (felhasználjuk, hogy ha két háromszögben a megfelelő két oldal által bezárt szög megegyezik, akkor a területek aránya az oldalak arányának a szorzatával egyenlő):

$$T_{AFH_1\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot T = \frac{T}{3},$$

$$T_{AFH_2\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot T = \frac{T}{6},$$

$$T_{BFN_x\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-x}{n} \cdot T = \frac{T(n-x)}{2n},$$

$$T_{CH_1N_x\Delta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{n} \cdot T = \frac{Tx}{3n},$$

$$T_{CH_2N_x\Delta} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{n} \cdot T = \frac{2Tx}{3n}.$$

Ezeket (1)-be és (2)-be beírva kapjuk, hogy:

$$(1') \quad T_{N_xFH_1\Delta} = T \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{n-x}{2n} - \frac{x}{3n} \right) = T \cdot \frac{n+x}{6n},$$

$$(2') \quad T_{N_xFH_2\Delta} = T \left(1 - \frac{1}{6} - \frac{n-x}{2n} - \frac{2x}{3n} \right) = T \cdot \frac{2n-x}{6n}.$$

Különböző x értékekre $T_{N_xFH_1\Delta}$ értéke is más lesz, és ugyanez igaz $T_{N_xFH_2\Delta}$ értékére is. Tehát az egyenlő területű háromszög-párokat csak így kereshetjük:

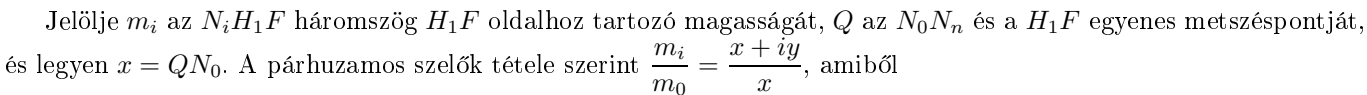
$$T_{N_xFH_1\Delta} = T_{N_yFH_2\Delta}, \quad \text{vagyis}$$

$$T \cdot \frac{n+x}{6n} = T \cdot \frac{2n-y}{6n}, \quad \text{ahonnan} \quad x+y=n.$$

Látható, hogy minden x értékhez pontosan egy y érték tartozik. Ezzel az állítást beláttuk.

II. megoldás. A harmadik oldal két végpontját jelölje N_0 és N_n . Feltehetjük, hogy a jelölések úgy vannak megválasztva, hogy az $N_0, N_1, \dots, N_n$ pontok ebben a sorrendben követik egymást, továbbá H_1 éppen az N_0H_2 szakasz felezőpontja. Ekkor az N_iN_{i+1} szakaszok ($0 \leq i < n$) mind egyenlő hosszúak, legyen ez a hossz y .

Ha a háromszög területe T , akkor az N_0H_1F és az N_nH_2F háromszögek területe egyaránt $\frac{T}{6}$, az N_0H_2F és N_nH_1F háromszögek pedig $\frac{T}{3}$, hiszen ha két háromszögben a megfelelő két oldal által bezárt szög megegyezik, akkor a területek aránya az oldalak arányának a szorzatával egyenlő.



Ebből pedig már következik, hogy az $N_i H_1 F$ háromszögek $H_1 F$ oldalhoz tartozó magassága egy $n + 1$ hosszúságú növekvő számtani sorozatot alkot, melynek első tagja m_0 , differenciája pedig $m_0 \cdot \frac{y}{x}$. Ennek megfelelően az $N_i H_1 F$ háromszögek területe egy olyan $n + 1$ tagú növekvő számtani sorozatot alkot, melynek első eleme $\frac{T}{6}$, az utolsó pedig $\frac{T}{3}$. Legyen ez a sorozat a_n . Hasonlóképpen az $N_i H_2 F$ háromszögek területe egy olyan $n + 1$ tagú csökkenő számtani sorozat, amelynek első eleme $\frac{T}{3}$, az utolsó pedig $\frac{T}{6}$. Legyen ez a sorozat b_n . A két számtani sorozat egyaránt $(n + 1)$ tagból áll, $a_1 = b_{n+1}$, $b_1 = a_{n+1}$. Ezen két észrevételből adódik, hogy $a_i = b_{n+2-i}$, amiből már következik a feladat állítása.