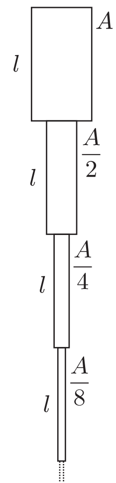
I. megoldás. Állandó keresztmetszet esetén L nem függ a szál A keresztmetszetétől, mert az $AL\varrho g$ súlyú szál egységnyi felületén mindig ugyanakkora, $L\varrho g$ feszültség ébred (ϱ a szál anyagának sűrűsége).

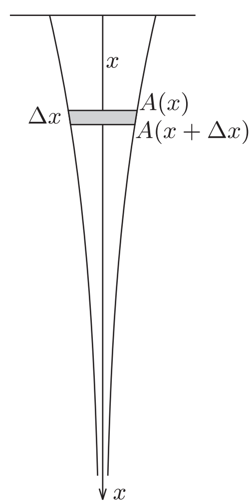
Változó keresztmetszetű szál akkor nem szakad el, ha bármely keresztmetszete alatti részének a súlya kisebb, mint $AL\varrho g$. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel tetszőleges hosszúságú (de véges össztömegű) szálrendszerrel teljesíthető, ha az egymáshoz erősített szálak keresztmetszete megfelelő módon változik.



1. ábra

Képzeljünk el egy A keresztmetszetű, l hosszúságú szálat, és legyen $l < L/2$. Ez a szál nyilván nem szakad el a saját súlya alatt. Erősítsünk most a szál alsó végéhez egy ugyancsak l hosszúságú, de csak $\frac{1}{2}A$ keresztmetszetű szálat, majd ahhoz egy l hosszú és $\frac{1}{4}A$ keresztmetszetű harmadikat, ehhez egy megint felére csökkentett keresztmetszetű negyediket és így tovább, elvben a végtelenségig (*1. ábra*)! Könnyen ellenőrizhető, hogy ennek a szálrendszernek – jóllehet a hossza elvben tetszőlegesen nagy lehet – az össztömege véges, és benne a húzófeszültség sehol nem éri el a kritikus $L\varrho g$ értéket.

II. megoldás. Keressünk olyan – folytonosan változó keresztmetszetű – szálat, amelynek minden vízszintes keresztmetszetét ugyanakkora húzófeszültség (felületegységre jutó húzóerő) terheli. Jelöljük a felfüggesztés alatt x távolságban a keresztmetszetet $A(x)$-szel, a benne ébredő feszültséget pedig írjuk fel ϱgl alakban. Ha $l < L$, akkor ez a (helyfüggetlen) húzófeszültség kisebb, mint a szakítószilárdság, tehát a szál sehol nem szakad el.



2. ábra

A szálat a felfüggesztés alatt x mélységben $\varrho gl \cdot A(x)$ erő terheli, ami éppen a kérdéses keresztmetszet alatti fonál teljes G súlya. Egy kicsiny Δx távolsággal lejjebb a szál keresztmetszete $A(x+\Delta x)$, a feszítőerő $\varrho gl \cdot A(x+\Delta x)$, és ez is a kérdéses keresztmetszet alatti fonál teljes súlya, vagyis $G - \varrho g \Delta x\, A(x)$. Fennáll tehát, hogy

$$\varrho gl\, A(x+\Delta x) = \varrho gl\, A(x) - \varrho g \Delta x\, A(x),$$

vagyis

$$\frac{A(x+\Delta x) - A(x)}{\Delta x} = \left(-\frac{1}{l}\right) A(x).$$

Ez az egyenlet, vagy a belőle $\Delta x \to 0$ határátmenettel kapható

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{A(x)}{l}$$

differenciálegyenlet ugyanolyan alakú, mint a radioaktív bomlások egyenlete, tehát a megoldása is azokkal alakilag megegyező:

$$A(x) = A_0 e^{-\frac{x}{l}},$$

ahol A_0 a felfüggesztés magasságában tetszőlegesen megválasztható kezdeti keresztmetszet. Ha a szál forgásszimmetrikus, akkor a keresztmetszetei körök, melyek sugara az

$$R(x) = R_0 e^{-\frac{x}{2l}}$$

függvény szerint változik. Ez elméletileg végtelen hosszú szálat ír le; a valóságban természetesen $R(x)$ nem csökkenhet akármilyen kicsiny értékre, pl. nem érheti el az atomi léptéket.