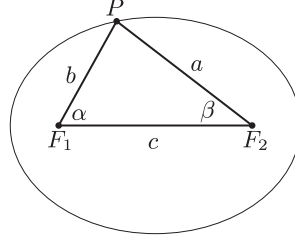


**I. megoldás.** Legyen a  $PF_1F_2$  háromszög három oldala  $a, b$  és  $c$ , kerülete  $a + b + c = 2s$ , szögei pedig  $\alpha, \beta$  és  $\gamma$  (lásd az *ábrát*). Ismert (lásd pl. Kiss Gy.: *Amit jó tudni a háromszögekről*, KöMaL 2002/3, 130–139. old.), hogy

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

így

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \cdot \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \frac{s-c}{s}.$$



Az ellipszis definíciója szerint  $PF_1 + PF_2 = a + b$  állandó, és mivel  $F_1F_2 = c$  rögzített, azért

$$\frac{s-c}{s} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$$

is állandó.

A feladatban szereplő

$$\operatorname{tg} \frac{PF_1F_2 \sphericalangle}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{PF_2F_1 \sphericalangle}{2}$$

kifejezés értéke valóban nem függ  $P$ -től.

**II. megoldás.** Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá  $2x = PF_1F_2 \sphericalangle = \alpha$ ,  $2y = PF_2F_1 \sphericalangle = \beta$  és  $2z = F_2PF_1 \sphericalangle = \gamma$ , ekkor  $x + y = 90^\circ - z$ . Ha a szóban forgó mennyiséget  $u$ -val jelöljük, akkor, mivel  $u \neq 0$ ,

$$\frac{1}{u} - 1 = \operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y - 1 = \frac{\cos x \cos y}{\sin x \sin y} - 1 = \frac{\cos(x+y)}{\sin x \sin y} > 0,$$

vagyis

$$\frac{u}{1-u} = \frac{\sin x \sin y}{\sin z}.$$

Mivel  $a + b$  és  $c$  csak az adott ellipszistől függ,  $\frac{a+b}{c}$  állandó. A szinusztétel szerint tehát

$$t = \frac{a+b}{c} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{2 \sin(x+y) \cos(x-y)}{2 \sin z \cos z} = \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y}{\sin z}$$

értéke is független  $P$ -től. Mivel  $\sin z = \cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ , kapjuk, hogy

$$0 < t = 1 + 2 \frac{\sin x \sin y}{\sin z} = 1 + 2 \frac{u}{1-u} = \frac{1+u}{1-u}.$$

Ebből pedig következik, hogy  $u = \frac{t-1}{t+1}$  értéke valóban csak az ellipszistől függ, a  $P$  helyzetétől nem.