

Megoldás.

Digitális kamera

3.1. A digitális kamerák felbontóképességét két tényező korlátozza: a nyílás fényszórása (diffrakciója) és a pixelek mérete. A diffrakció miatti Θ_R szögfelbontást a fény λ hullámhosszának és a kameranyílás átmérőjének aránya határozza meg:

$$\Theta_R = 1,22 \frac{\lambda}{D},$$

ahol az 1,22-es tényező a kameranyílás kör alakjának a következménye. Mivel a legtöbb gyakorlati esetben a tárgy eléggé messze van a kamerától, így a kép a kamera fókuszsíkjaiban keletkezik, tehát akkor különböztethetünk meg egymástól két képpontot, ha a közöttük lévő távolság nagyobb, mint

$$\Delta x = f \cdot \Theta_R = 1,22 \cdot \lambda \cdot F\#,$$

melynek számszerű értéke: $\Delta x = 1,22 \mu\text{m}$. Becsléskor a lehető legnagyobb nyílást (tehát a lehető legkisebb, vagyis $F\# = 2$ -es numerikus apertúra értéket) választottuk, valamint a megadott $\lambda = 500 \text{ nm}$ -es tipikus hullámhosszat használtuk.

3.2. A digitális felbontóképességet a szomszédos pixelek középpontja közötti l távolság adja meg. Az 5 Mpix-es kameránk esetén ez a távolság közelítőleg:

$$l = \frac{L}{\sqrt{N_p}} = 15,65 \mu\text{m}.$$

Ideális esetben az optikai és a digitális felbontóképesség összhangban van egymással. Ha a sokkal jobb optikai felbontóképességet várjuk el a digitális felbontástól is, akkor a szükséges pixelszám:

$$N = \left(\frac{L}{\Delta x} \right)^2 \approx 823 \text{ Mpix}.$$

3.3. Az optika akkor nem befolyásolja a felbontóképességet, ha $l \geq \Delta x$. Ehhez olyan $F\# \leq F_0$ értéket kell választanunk, ahol

$$F_0 = \frac{L}{1,22 \cdot \lambda \cdot \sqrt{N_0}} = 2 \sqrt{\frac{N}{N_0}} = 14,34.$$

Mivel a kamerákon ilyen $F\#$ érték beállítása nem lehetséges, ezért azt a hozzá legközelebbi numerikus apertúrát kell választanunk, ami *jobb* felbontóképességet ad, vagyis $F_0 = 11$.

3.4. Ha a szemünktől z távolságra lévő képet nézzük, két szomszédos képpont közötti (kicsiny) látószög így adható meg: $\varphi = \frac{l}{z}$, ahol l a szomszédos képpontok közötti távolság. Mivel az emberi szem szög szerinti felbontóképessége kb. $2'$ (azaz 2 szögperc¹), a kérdéses távolság:

$$z = \frac{l}{\varphi} = \frac{2,54 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{2 \cdot 2,91 \cdot 10^{-4} \cdot 300} = 14,55 \text{ cm} \approx 15 \text{ cm}.$$

Keménytojás

3.5. Az egész tojásnak el kell érnie a kicsapódási hőmérsékletet. Ez azt jelenti, hogy a tojás hőmérsékletének növekedése:

$$\Delta T = T_c - T_0 = 65^\circ\text{C} - 4^\circ\text{C} = 61^\circ\text{C}.$$

Így a tojás teljes kicsapódásához szükséges minimális energia: $U = \mu V c \Delta T$, ahol $V = 4\pi R^3/3$ a tojás térfogata. A kicsapódáshoz szükséges minimális energia számértéke:

$$U = \mu \frac{4\pi R^3}{3} c (T_c - T_0) = 16\,800 \text{ J}.$$

3.6. Durva becslésként felhasználhatjuk a hővezetés egyszerűsített Fourier-törvényét, és így közelítőleg kiszámíthatjuk a kezdeti J hőáramsűrűséget. Feltehetjük, hogy a tojás közepében a hőmérséklet megegyezik a tojás kezdeti $T_0 = 4^\circ\text{C}$ -os hőmérsékletével, továbbá a tojást jellemző tipikus hossz $\Delta r = R$ a tojás sugara, illetve az ennek megfelelő hőmérsékletkülönbség $\Delta T = T_1 - T_0$, ahol $T_1 = 100^\circ\text{C}$ a víz forráspontja. Így

$$J = \frac{\kappa(T_1 - T_0)}{R} = 2460 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

3.7. A fenti hőáram segítségével becslést adhatunk a forró vízből a tojás felszínén át a tojásba áramló hőteljesítmény nagyságára:

$$P = 4\pi R^2 J = 4\pi \kappa R (T_1 - T_0) \approx 19 \text{ W}.$$

¹ Múlt havi számunkban szögperc helyett tévesen szögmásodperc szerepelt.

3.8. A hőteljesítmény megadja a tojásba behatoló hő mennyiségét másodpercenként. Ezzel és a kicsapódáshoz szükséges energiával közelítő becslést adhatunk a keménytojás τ főzési idejére:

$$\tau = \frac{U}{P} = \frac{\mu c R^2}{3\kappa} \cdot \frac{T_c - T_0}{T_1 - T_0} \approx 880 \text{ s} \approx 15 \text{ perc.}$$

Villámlás

3.9. A villám Q töltését az áramerősség-idő függvény görbe alatti területe (esetünkben egy háromszög területe) adja meg:

$$Q = \frac{I_0 \tau}{2} = 5 \text{ C.}$$

3.10. Az átlagos áram a töltés és az idő hányadosa, a lineáris áramerősség-idő függvény miatt egyszerűen a maximális áramérték fele:

$$I = \frac{Q}{\tau} = \frac{I_{\max}}{2} = 50 \text{ kA.}$$

3.11. Mivel a felhő alja negatív töltésű, így a talaj pozitív töltésű, ezért a villámláskor megvalósuló helyzetet lényegében egy gigantikus síkkondenzátorral közelíthetjük. Így a villámcsapás előtti pillanatban a felhalmozódott energia $QE_0h/2 = 7,5 \cdot 10^8 \text{ J}$, ahol E_0h a felhő alja és a talaj közötti feszültség. Villámláskor közelítőleg ekkora, 750 MJ-nyi energia szabadul fel. Ezek után már könnyen kiszámíthatjuk, hogy a Föld egy évi összes villámjának energiája, amit (gondolatban) szétosztunk a Föld teljes népessége között, mennyi ideig tudna emberenként egy-egy 100 W-os izzólámpát működtetni:

$$t = \frac{32 \cdot 10^6}{6,5 \cdot 10^9} \cdot \frac{7,5 \cdot 10^8 \text{ J}}{100 \text{ W}} \approx 10 \text{ h.}$$

Hajszálerek

3.12. A Poisseuille-féle törvényt átrendezve megkaphatjuk az *összes* hajszálér által képviselt R_Σ eredő áramlási ellenállást:

$$R_\Sigma = \frac{\Delta p}{D} = 10^7 \frac{\text{Pa s}}{\text{m}^3}.$$

Mint ahogy a hajszálerek „párhuzamosan vannak kapcsolva”, az elektromos analógiát használva

$$\frac{1}{R_\Sigma} = \frac{N}{R}, \quad \text{ahol} \quad R = \frac{8\eta L}{\pi r^4} \approx 4,5 \cdot 10^{16} \frac{\text{kg}}{\text{m}^4 \text{ s}}$$

egyetlen hajszálér áramlási ellenállása. Innen a hajszálerek száma:

$$N = \frac{R}{R_\Sigma} \approx 4,5 \cdot 10^9.$$

3.13. A térfogati „vérhozamot” (D) kifejezhetjük a vér v áramlási sebességével, valamint az erek $r^2\pi$ keresztmetszetével:

$$D = vNr^2\pi, \quad \text{ahonnan} \quad v = \frac{D}{Nr^2\pi} = 0,44 \frac{\text{mm}}{\text{s}}.$$

Felhőkarcoló

3.14. A $pV = NkT$ ideális gázegyenletnek és az adiabatikus folyamatokat jellemző $pV^\gamma = \text{állandó}$ összefüggésnek a kombinálásából adódik, hogy adiabatikus folyamat esetén $p^{\gamma-1} = KT^\gamma$, ahol K a gázra jellemző konstans. Ha a nyomás kis dp -vel megváltozik, akkor az egyenlet bal oldala $(\gamma - 1)p^{\gamma-2}dp$ -vel változik meg, és hasonlóan kis dT hőmérsékletváltozás esetén a jobb oldal $K\gamma T^{\gamma-1}dT$ -vel változik meg. E két változás azonban megegyezik, tehát

$$(\gamma - 1)p^{\gamma-2}dp = K\gamma T^{\gamma-1}dT.$$

A fenti két egyenletet elosztva egymással megkapjuk a keresett összefüggést:

$$\frac{dT}{T} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{dp}{p} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}.$$

Ugyanezt az eredményt úgy is megkaphatjuk, hogy képezzük a $pV = NkT$ egyenlet mindkét oldalának kicsiny megváltozását: $p dV + V dp = Nk dT$, valamint felírjuk az adiabatikus állapotváltozásra vonatkozó

$$dE + p dV = \frac{5}{2} Nk dT + p dV = 0$$

egyenletet (kihasználva, hogy a nitrogénmolekulák szabadsági foka 5). A fenti három egyenletből V és dV kiküszöbölése után

$$\frac{dT}{T} = \frac{2}{7} \frac{dp}{p}.$$

adódik.

3.15. Az A vízszintes felületű, z magasságban levő, dz vastagságú levegőrétegre ható nehézségi erővel a felső és alsó lapra ható nyomás különbségéből származó erő tart egyensúlyt. Az $A dz$ térfogatban levő részecskék száma a gáztörvény alapján $N = \frac{pA dz}{kT}$, tehát a gázra ható nehézségi erő $Nmg = \frac{pA dz}{kT} mg$, ahol m egyetlen részecske tömege. A $dp = p(z + dz) - p(z)$ nyomáskülönbségből származó erő pedig $A dp$, tehát

$$\frac{pA dz}{kT} mg = -A dp, \quad \text{ahonnan} \quad dp = -\frac{mgp}{kT} dz.$$

(A negatív előjel arra utal, hogy a nyomás a magasság növekedésével csökken.)

3.16. Az előző két pontban levezetett összefüggések alapján a hőmérsékletváltozás és a magasságváltozás között a kapcsolatot:

$$dT = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{mg}{k} dz = -\frac{2mg}{7k} dz.$$

Látható, hogy a hőmérséklet a magassággal egyenes arányban csökken, így a keresett hőmérsékletet:

$$T_{\text{fent}} = T_{\text{lent}} - \frac{2mgH}{7k} = 20,6 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

(Felhasználtuk, hogy $T_{\text{lent}} = 30 \text{ } ^\circ\text{C}$, és $H = 1000 \text{ m}$.)