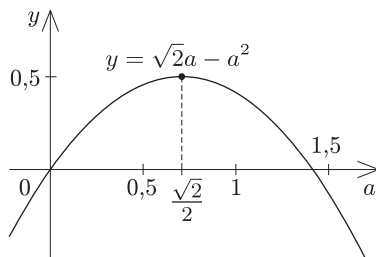


I. megoldás. Legyen $a = \sqrt{\sin x}$, vagyis a $\sqrt{2}a - a^2$ másodfokú kifejezést vizsgáljuk.



Megkeressük a zérushelyeit:

$$-a^2 + \sqrt{2}a = 0, \quad a(-a + \sqrt{2}) = 0.$$

Tehát a zérushelyek: $a_1 = 0$, $a_2 = \sqrt{2}$.

Mivel a^2 együttthatója negatív, azért a függvény a két zérushelyének számtani közepében veszi fel a maximumát, azaz

$$a = \sqrt{\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Ebből következik, hogy $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ ($k_1 \in \mathbb{Z}$), $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi$ ($k_2 \in \mathbb{Z}$).

II. megoldás.

$$\begin{aligned} \sqrt{2\sin x} - \sin x &= \sqrt{\sin x} \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{\sin x}) \leq \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{2} - \sqrt{\sin x}}{2} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Felhasználtuk a számtani és mértani közép-re vonatkozó egyenlőtlenség négyzetre emelt alakját: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$, ahol egyenlőség $a = b$ esetén van.

A fenti kifejezés maximuma tehát $\frac{1}{2}$, és ezt akkor veszi fel, ha $\sqrt{\sin x} = \sqrt{2} - \sqrt{\sin x}$, amiből $\sin x = \frac{1}{2}$. Ebből következik, hogy a kifejezés értéke $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ ($k_1 \in \mathbb{Z}$) és $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi$ ($k_2 \in \mathbb{Z}$) esetén a legnagyobb.