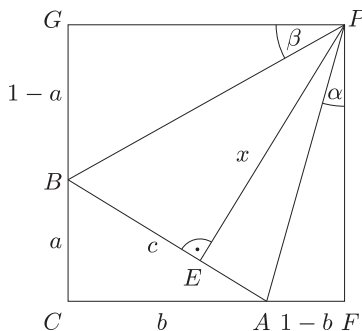


I. megoldás. Jelölje az ABC háromszög derékszögű csúcsát C . Ekkor a CA és CB oldalegyeneseket meghosszabbítva a háromszöget behelyezhetjük egy egységnyi oldalhosszú $CGPF$ négyzetbe. Mivel a CP átló hossza $\sqrt{2}$, így P éppen a keresett pont, vagyis a BPA szöget kell meghatároznunk. (Megjegyzés: igazolható, hogy az ABC háromszög befogói 1 egységnél rövidebbek.)



Az ABC háromszög oldalait jelölje a szokásos módon a , b és c , továbbá a P pontból AB -re állított merőleges talppontját jelöljük E -vel, végül legyen $PE = x$ (lásd az ábrát). A négyzet területe egységnyi, így

$$\frac{xc}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1-a}{2} + \frac{1-b}{2} = 1.$$

Mivel a háromszög kerülete 2, azért

$$c = 2 - a - b.$$

Ezt az előző egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$x = \frac{a + b - ab}{2 - a - b}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján $a^2 + b^2 = c^2 = (2 - a - b)^2$, a négyzetre emelés és az egyszerűsítés után ez az egyenlet $4 - 4a - 4b + 2ab = 0$ alakra hozható, amiből pedig $2 - a - b = a + b - ab$. Ezt a korábbi, x -re kapott összefüggésbe behelyettesítve $x = 1$ -et kapunk.

Mivel $GP = EP = 1$, azért a PGB és PEB derékszögű háromszögek egybevágók. Hasonlóan belátható a PEA és PFA háromszögek egybevágósága is. Ebből következik, hogy $GPB \sphericalangle = BPE \sphericalangle$, illetve $EPA \sphericalangle = APF \sphericalangle$. Vagyis a BPA szög a GPF derékszög fele, azaz $BPA \sphericalangle = BPE \sphericalangle + EPA \sphericalangle = 45^\circ$ -os szögben látszik az átfogó a kérdéses pontból.

Megjegyzés. A $PG = PE = PF$ egyenlőségből kapjuk, hogy a P pont éppen a háromszög átfogójához hozzáírt kör középpontja. Ismeretes, hogy derékszögű háromszögben az átfogóhoz írt kör sugara egyenlő a félkerülettel – ami jelen esetben 1 egység –, az állítás lényegében a fenti megoldásban alkalmazott gondolatmenettel bizonyítható. Továbbá a külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, így $PGBE$ és $PEAF$ deltoidok, amiből szintén megkaphatjuk a feladat megoldását.

II. megoldás. Használjuk az előző megoldás ábráját, legyen továbbá $APF \sphericalangle = \alpha$ és $GPB \sphericalangle = \beta$. Az előző megoldásban igazolt $4 - 4a - 4b + 2ab = 0$ egyenletet átrendezve

$$a = \frac{2 - 2b}{2 - b} = 2 - \frac{2}{2 - b}.$$

Ekkor $AF = 1 - b$ és $BG = 1 - a = \frac{2}{2 - b} - 1$. Továbbá

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1 - b}{1}, \quad \text{valamint} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\frac{2}{2 - b} - 1}{1}.$$

A tangensfüggvény addíciós képletét felhasználva

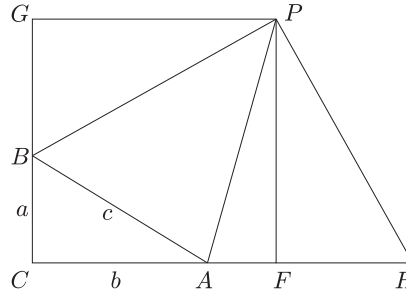
$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta} = \frac{(1 - b) + \left(\frac{2}{2 - b} - 1\right)}{1 - (1 - b) \left(\frac{2}{2 - b} - 1\right)} = \frac{(1 - b)(2 - b) + b}{(2 - b) - (1 - b)b} = 1.$$

Tehát $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1$, amiből $\alpha + \beta = 45^\circ$. Mivel $BPA \sphericalangle = 90^\circ - (\alpha + \beta) = 45^\circ$, azért a keresett szög nagysága 45° .

Megjegyzés. Szögfüggvények használatával egy másik megoldást is kaphatunk, ha először felírjuk a PBC és CAP háromszögek PB , illetve PA oldalára a koszinusztételt (innen $PB^2 = a^2 - 2a + 2$ és $PA^2 = b^2 - 2b + 2$ adódik), majd újból alkalmazzuk a koszinusztételt a PBA háromszög BA oldalára (amiből $\cos \angle APB = \frac{1}{\sqrt{2}}$ adja a végeredményt).

Néhányan ugyanezt a megoldást koordináta-geometriai úton igazolták, ekkor az APB szög nagysága a $\vec{PA}$ és $\vec{PB}$ vektorok skaláris szorzatából számítható ki.

III. megoldás. Használjuk az előző megoldások jelöléseit. Forgassuk el a PGB háromszöget P körül pozitív irányban 90° -kal. Mivel $PG = PF$, $\angle GPF = 90^\circ$ és $\angle PGB + \angle PFA = 180^\circ$, azért a forgatás után a PFH háromszöget kapjuk, amelynek H csúcsa rajta van az AF egyenesen.



Mivel $PA = PA$, $PB = PH$ (a forgatás miatt), valamint $AH = AF + FH = (1 - b) + (1 - a) = 2 - a - b = c = AB$, azért az APB és APH háromszögek egybevágók, ebből adódóan $\angle BPA = \angle APH$. A forgatás alapján $\angle BPH = 90^\circ$, innen tehát $\angle BPA = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$.