

Megoldás. Pozitív egészek összege csak véges sokféleképpen lehet 2006, ezért a kérdéses összegnek létezik minimuma. Írjuk fel az összeget a következő alakban:

$$\binom{a_1}{2} + \dots + \binom{a_{10}}{2} = \frac{a_1^2 - a_1}{2} + \dots + \frac{a_{10}^2 - a_{10}}{2} = \frac{a_1^2 + \dots + a_{10}^2}{2} - 1003.$$

Innen látható, hogy elegendő a négyzetösszeg legkisebb értékét megtalálni. Legyen az a_i számok közül hatnak az értéke 201, a többi négyé pedig 200; ez a feladat feltételeit kielégítő egyetlen olyan megoszlás, amikor a tíz szám közül bármelyik kettőnek a különbsége legfeljebb 1. Megmutatjuk, hogy minden más esetben a számokat a feltételek keretein belül meg tudjuk változtatni úgy, hogy a négyzetösszegük csökkenjen. Ilyenkor ugyanis mindig létezik köztük kettő, a és b , amelyekre például $a \geq b + 2$; helyettesítsük a -t $(a - 1)$ -gyel, b -t pedig $(b + 1)$ -gyel. Ekkor

$$(a^2 + b^2) - ((a - 1)^2 + (b + 1)^2) = 2(a - b - 1) \geq 2.$$

A négyzetösszeg tehát csak a fenti esetben veheti fel a minimumát, ami ezek szerint $6 \cdot 201^2 + 4 \cdot 200^2 = 402\,406$, a feladatban szereplő összeg legkisebb értéke ezért

$$\frac{402\,406}{2} - 1003 = 200\,200.$$