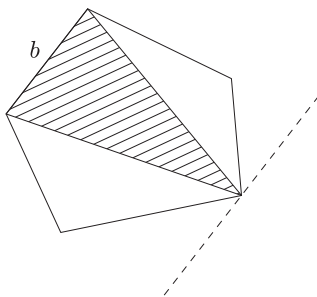
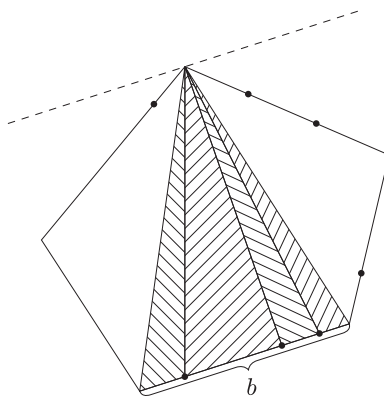


**Megoldás.** A sokszög mindegyik  $b$  oldalához létezik a szóban forgó maximális területű háromszög: ennek  $b$ -vel szemközti csúcsa a  $b$  egyenesétől legtávolabbi csúcs  $P$ -ben (3. ábra). A megoldás során egy  $XYZ$  háromszög területét  $[XYZ]$ -vel, a  $P$  sokszög területét pedig  $[P]$ -vel jelöljük.

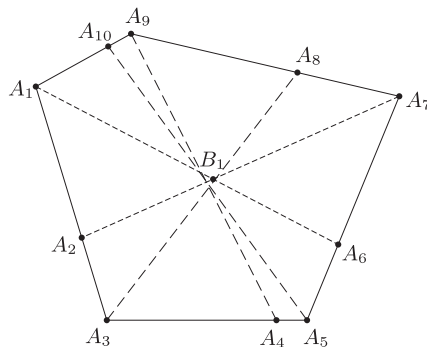


3. ábra

Első észrevételünk az, hogy ha egy sokszög szögei között a  $180^\circ$ -ot is megengedjük és az oldalakon újabb csúcsokat veszünk fel, akkor sem  $P$  területe, sem a  $P$  oldalaihoz rendelt területek összege nem változik (4. ábra). Ezért  $P$  minden csúcsából húzzuk meg azt a félegyenest, amely  $P$  területét felezi (folytonossági megfontolások miatt ilyen félegyenes minden csúcsához létezik), és e félegyenesnek a  $P$  határával való másik metszéspontját vegyük fel a csúcsok közé. Így az  $A_1A_2A_3 \dots A_{2n}$  sokszöget kapjuk, melynek területét az  $A_iA_{n+i}$  egyenes minden  $i$ -re felezi (5. ábra). (Az indexelés mod  $2n$  ciklikus.)

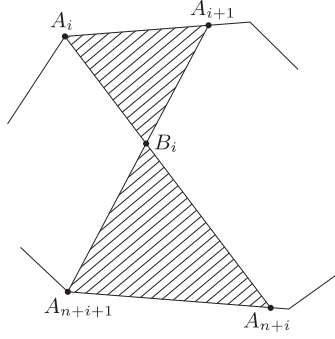


4. ábra



5. ábra

Az  $A_iA_{n+i}$  és  $A_{i+1}A_{n+i+1}$  egyenesek tehát felezik a sokszög területét, így a  $P$  belsejében metszik egymást (6. ábra); jelölje a metszéspontjukat  $B_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Ekkor  $[A_iA_{i+1}B_i] = [A_{n+i}A_{n+i+1}B_i]$ , hiszen  $A_iA_{i+1}$  és  $A_{n+i}A_{n+i+1}$  is felezi  $P$  területét. Legyen  $t_i = [A_iA_{i+1}B_i]$ ; ekkor  $t_i = t_{n+i}$  és  $B_i = B_{n+i}$ .



6. ábra

Azt állítjuk, hogy az  $A_i A_{i+1} B_i$  háromszögek lefedik  $P$ -t, és így  $\sum_{i=1}^{2n} t_i \geq [P]$ . Ehhez vegyük észre, hogy adott  $i$ -re az  $A_i A_{i+1} B_i$  és az  $A_{n+i} A_{n+i+1} B_i$  háromszögek belsejének egyesítése azon  $P$ -beli pontok halmaza, amelyek az  $A_i A_{n+i}$  és  $A_{i+1} A_{n+i+1}$  félegyenesek ellentétes partján vannak. (Ha egy  $P$ -beli  $X$  pont nincs ezeken a félegyeneseken, akkor ez azt jelenti, hogy az  $A_i A_{n+i} X$  és az  $A_{i+1} A_{n+i+1} X$  háromszögek ellenkező körüljárásúak.) Tekintsük ezután a  $P$  egy tetszőleges belső  $X$  pontját, amelyik egyik  $A_i A_{i+1}$  félegyenesre sem illeszkedik. Ez a pont a fentiek értelmében az  $A_1 A_{n+1}$  és az  $A_{n+1} A_1$  félegyenesek ellentétes partján van, így az  $A_1 A_{n+1}, A_2 A_{n+2}, \dots, A_n A_{2n}, A_{n+1} A_1$  félegyenesek sorozatában van két szomszédos, az  $A_i A_{n+i}$  és az  $A_{i+1} A_{n+i+1}$ , amelyeknek  $X$  szintén az ellentétes partján van. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy  $X$  benne van az  $A_i A_{i+1} B_i$  és az  $A_{n+i} A_{n+i+1} B_i$  háromszögek egyikében (6. ábra).

Legyen az  $A_i A_{i+1}$  oldalhoz tartozó maximális területű háromszög területe  $M_i$ . Mivel  $[A_i A_{i+1} B_i] = [A_{n+i} A_{n+i+1} B_i]$ , ezért  $B_i A_i \cdot B_i A_{i+1} = B_i A_{n+i} \cdot B_i A_{n+i+1}$ . Ekkor vagy  $B_i A_i \leq B_i A_{n+i}$  és  $B_i A_{i+1} \geq B_i A_{n+i+1}$  vagy pedig  $B_i A_i \geq B_i A_{n+i}$  és  $B_i A_{i+1} \leq B_i A_{n+i+1}$ .

Az első esetben

$$\frac{[A_i A_{i+1} A_{n+i}]}{[A_i A_{i+1} B_i]} = \frac{A_i A_{n+i}}{A_i B_i} \geq 2, \text{ és így } M_i \geq [A_i A_{i+1} A_{n+i}] \geq 2t_i.$$

A második esetben hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{[A_i A_{i+1} A_{n+i+1}]}{[A_i A_{i+1} B_i]} = \frac{A_{i+1} A_{n+i+1}}{A_{i+1} B_i} \geq 2, \text{ és így ekkor is } M_i \geq [A_i A_{i+1} A_{n+i+1}] \geq 2t_i.$$

Mindenképpen igaz tehát, hogy  $M_i \geq 2t_i$ . Ezeket az egyenlőtlenségeket összegezve kapjuk, hogy  $\sum_{i=1}^{2n} M_i \geq 2 \sum_{i=1}^{2n} t_i \geq 2[P]$ , és ezt kellett bizonyítanunk.