

I. megoldás. Vegyük észre, hogy pl. $3^3 + 4^3 = 91 = 6^3 - 5^3$, ezért $\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 - 1$. Így, mivel $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ és $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ egyaránt szigorúan 0 és 1 közti racionális számok és $1 < \left(\frac{6}{5}\right)^3 < 2$,

$$\left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^3 \right\} + \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^3 \right\} = \left\{ \left(\frac{6}{5}\right)^3 \right\}.$$

Ebből úgy kaphatunk további megoldásokat, hogy a $\frac{3}{5}$ -höz, a $\frac{4}{5}$ -höz és a $\frac{6}{5}$ -höz egész számokat adunk úgy, hogy a köbük értéke is csak egész számmal változzék, azaz változatlan maradjon a köbök törtrésze. Az

$$(n+r)^3 = n^3 + 3n^2r + 3nr^2 + r^3$$

azonosságból világos, hogy ha r racionális szám és az n egész osztható az r nevezőjének a négyzetével, akkor $n^3 + 3n^2r + 3nr^2$ egész, ezért $\{(n+r)^3\} = \{r^3\}$.

Tehát (tetszőleges k egészszel) $x = \frac{3}{5} + 25k$, $y = \frac{4}{5} + 25k$, $z = \frac{6}{5} + 25k$ végtelen sok, kívánt tulajdonságú megoldása van az egyenletnek.

Megjegyzés. A fenti megoldásban – egyetlen kivétellel, amikor $k = 0$ – az x , y és z számok 1-nél nagyobb abszolút értékűek. A törtrészre tekintettel szebbnek éreznénk, ha 1-nél kisebb abszolút értékű megoldás is (végtelen sok) volna. Ez a szépség azonban elérhetetlen: ha például $0 < x, y, z < 1$ lenne, akkor az egyenletben a törtrész jele mindenütt elhagyható lenne, és az $x^3 + y^3 = z^3$ egyenletet kapnánk. A nemnulla x^3, y^3, z^3 racionális számok nevezőinek szorzatával (ami egy nemnulla köbszám) az egyenlet mindkét oldalát megszorozva az $X^3 + Y^3 = Z^3$ összefüggést kapnánk, ahol X, Y és Z pozitív egészek; ez azonban a Fermat–Wiles-tételnek már Euler által igazolt speciális esete szerint lehetetlen. A következő konstrukció viszont azt mutatja, hogy a kívánt állapot legalábbis megközelíthető: létezik a feladat egyenletének végtelen sok olyan (nem egész racionális számokból álló) megoldása, ahol $|y|$ és $|z|$ is 1-nél kisebb.

II. megoldás. Legyen n egész szám, és tekintsük a következő azonosságokat.

$$(9n^4 + 3n)^3 + 1 = 729n^{12} + 729n^9 + 243n^6 + 27n^3 + 1,$$

$$(9n^4)^3 + (9n^3 + 1)^3 = 729n^{12} + 729n^9 + 243n^6 + 27n^3 + 1,$$

így

$$(9n^4 + 3n)^3 + 1 = (9n^4)^3 + (9n^3 + 1)^3,$$

azaz

$$\left(\frac{9n^4 + 3n}{9n^4}\right)^3 + \left(\frac{1}{9n^4}\right)^3 = \left(\frac{9n^3 + 1}{9n^4}\right)^3 + 1.$$

Ha $n \geq 2$, akkor $0 < \frac{1}{9n^4} < 1$ és $0 < \frac{9n^3 + 1}{9n^4} < 1$, és ezért

$$\left\{ \left(\frac{9n^4 + 3n}{9n^4}\right)^3 \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{9n^4}\right)^3 \right\} = \left\{ \left(\frac{9n^3 + 1}{9n^4}\right)^3 \right\}.$$