

**I. megoldás.** Vegyük észre, hogy pl.  $3^3 + 4^3 = 91 = 6^3 - 5^3$ , ezért  $\left(\frac{3}{5}\right)^3 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^3 - 1$ . Így, mivel  $\left(\frac{3}{5}\right)^3$  és  $\left(\frac{4}{5}\right)^3$  egyaránt szigorúan 0 és 1 közti racionális számok és  $1 < \left(\frac{6}{5}\right)^3 < 2$ ,

$$\left\{ \left(\frac{3}{5}\right)^3 \right\} + \left\{ \left(\frac{4}{5}\right)^3 \right\} = \left\{ \left(\frac{6}{5}\right)^3 \right\}.$$

Ebből úgy kaphatunk további megoldásokat, hogy a  $\frac{3}{5}$ -höz, a  $\frac{4}{5}$ -höz és a  $\frac{6}{5}$ -höz egész számokat adunk úgy, hogy a köbük értéke is csak egész számmal változzék, azaz változatlan maradjon a köbök törtrésze. Az

$$(n+r)^3 = n^3 + 3n^2r + 3nr^2 + r^3$$

azonosságból világos, hogy ha  $r$  racionális szám és az  $n$  egész osztható az  $r$  nevezőjének a négyzetével, akkor  $n^3 + 3n^2r + 3nr^2$  egész, ezért  $\{(n+r)^3\} = \{r^3\}$ .

Tehát (tetszőleges  $k$  egészszel)  $x = \frac{3}{5} + 25k$ ,  $y = \frac{4}{5} + 25k$ ,  $z = \frac{6}{5} + 25k$  végtelen sok, kívánt tulajdonságú megoldása van az egyenletnek.

*Megjegyzés.* A fenti megoldásban – egyetlen kivétellel, amikor  $k = 0$  – az  $x$ ,  $y$  és  $z$  számok 1-nél nagyobb abszolút értékűek. A törtrészre tekintettel szebbnek éreznénk, ha 1-nél kisebb abszolút értékű megoldás is (végtelen sok) volna. Ez a szépség azonban elérhetetlen: ha például  $0 < x, y, z < 1$  lenne, akkor az egyenletben a törtrész jele mindenütt elhagyható lenne, és az  $x^3 + y^3 = z^3$  egyenletet kapnánk. A nemnulla  $x^3, y^3, z^3$  racionális számok nevezőinek szorzatával (ami egy nemnulla köbszám) az egyenlet mindkét oldalát megszorozva az  $X^3 + Y^3 = Z^3$  összefüggést kapnánk, ahol  $X, Y$  és  $Z$  pozitív egészek; ez azonban a Fermat–Wiles-tételnek már Euler által igazolt speciális esete szerint lehetetlen. A következő konstrukció viszont azt mutatja, hogy a kívánt állapot legalábbis megközelíthető: létezik a feladat egyenletének végtelen sok olyan (nem egész racionális számokból álló) megoldása, ahol  $|y|$  és  $|z|$  is 1-nél kisebb.

**II. megoldás.** Legyen  $n$  egész szám, és tekintsük a következő azonosságokat.

$$(9n^4 + 3n)^3 + 1 = 729n^{12} + 729n^9 + 243n^6 + 27n^3 + 1,$$

$$(9n^4)^3 + (9n^3 + 1)^3 = 729n^{12} + 729n^9 + 243n^6 + 27n^3 + 1,$$

így

$$(9n^4 + 3n)^3 + 1 = (9n^4)^3 + (9n^3 + 1)^3,$$

azaz

$$\left(\frac{9n^4 + 3n}{9n^4}\right)^3 + \left(\frac{1}{9n^4}\right)^3 = \left(\frac{9n^3 + 1}{9n^4}\right)^3 + 1.$$

Ha  $n \geq 2$ , akkor  $0 < \frac{1}{9n^4} < 1$  és  $0 < \frac{9n^3 + 1}{9n^4} < 1$ , és ezért

$$\left\{ \left(\frac{9n^4 + 3n}{9n^4}\right)^3 \right\} + \left\{ \left(\frac{1}{9n^4}\right)^3 \right\} = \left\{ \left(\frac{9n^3 + 1}{9n^4}\right)^3 \right\}.$$