I. megoldás.

$$648 = x^6 - y^2 = (x^3)^2 - y^2 = (x^3+y)(x^3-y) =$$
$$= 2^3 \cdot 3^4 = 2 \cdot 324 = 4 \cdot 162 = 6 \cdot 108 = 12 \cdot 54 = 18 \cdot 36.$$

A lehetséges osztópárok közül csak azokat írtuk fel, amelyekben mindkét tényező páros, hiszen ezek a tényezők két szám összegével és különbségével egyenlők, így azonos paritásúak. Ezenfelül, mivel szorzatuk páros, csak két páros tényezőről lehet szó.

A megfelelő osztópárban az egyik tényező (x^3+y)-nal, a másik (x^3-y)-nal egyenlő, ezért különbségük $2y$. A következő táblázatban a lehetséges y értékeket, majd abból a lehetséges $|x|$ értékeket adjuk meg. Ahol $|x|$-re egész számot kapunk, az annak megfelelő x, y számpárok teszik igazzá az egyenletet.

x^3+y	x^3-y	$(x^3+y)-(x^3-y)=2y$	y	$x^6=648+y^2$	$\|x\|$
324	2	322	161	26 569	nem egész
2	324	−322	−161	26 569	nem egész
162	4	158	79	6889	nem egész
4	162	−158	−79	6889	nem egész
108	6	102	51	3249	nem egész
6	108	−102	−51	3249	nem egész
54	12	42	21	1089	nem egész
12	54	−42	−21	1089	nem egész
36	18	18	9	729	3
18	36	−18	−9	729	3

Tehát az egyenlet megoldásai: $x_1=3$, $y_1=9$; $x_2=-3$, $y_2=9$; $x_3=3$, $y_3=-9$; $x_4=-3$, $y_4=-9$.

II. megoldás. Az x és y páros hatványon szerepel, ezért ha $(x;y)$ megoldáspár, akkor $(-x;y)$, $(-x;-y)$, $(x;-y)$ is megoldás.

Mivel 648 páros, azért x^6 és y^2 azonos paritású.

Tegyük föl először, hogy x és y is páros. Ekkor $x=2n$, $y=2m$.

$$(2n)^6-(2m)^2=648,$$
$$2^6n^6-2^2m^2=2^3\cdot 3^4,$$
$$2^4n^6-m^2=2\cdot 3^4.$$

Az m csak páros lehet, mivel 2^4n^6 és $2\cdot 3^4$ egyaránt páros. Így m^2 4-gyel is osztható, ezért a bal oldal osztható 4-gyel, a jobb oldal viszont nem. Tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Nézzük ezután azt az esetet, ha x és y is páratlan. A páratlan négyzetszámok csak 1-re, 5-re vagy 9-re végződhetnek. Tehát x^6 utolsó számjegyének 9-nek, y^2 utolsó számjegyének 1-nek kell lennie, mert csak ilyen végződésű számok különbségéből kapjuk meg a 648 utolsó 8-as számjegyét. Így sem x, sem y nem végződhet 5-re.

Határozzuk meg $|x|$ minimális és maximális értékét. Az előzőek miatt $|x|\ge 3$. Mivel x^6 négyzetszám, érdemes lehet megvizsgálni két négyzetszám különbségét. Szomszédos egész számok négyzetének különbsége folyamatosan nő, ha a számok növekednek. Ha tehát $|x|$ maximális értékét keressük, az alábbi egyenlőtlenség alapján járhatunk el:

$$a^2-(a-1)^2\le 648,$$

amiből $a\le 324{,}5$. Jelen esetben $a=x^3$, tehát $|x|\le 6{,}87$.

A fentiek szerint $|x|$ páratlan, nem lehet 5, tehát csak 3 lehet. Ekkor a

$$3^6-y^2=648$$

egyenletből $|y|=9$.

Tehát a

$$(3;9),\quad (-3;9),\quad (-3;-9)\quad \text{és}\quad (3;-9)$$

megoldáspárokra teljesül az egyenlőség.

Megjegyzés. A bal oldal szorzattá alakítása után a többség a lehetséges osztópárok végignézésével jutott el a helyes megoldásra. Néhányan – megfelelő indoklással – alsó és felső becslést adtak a lehetséges x értékekre, majd a közöttük lévő lehetőségeket mind kipróbálták.