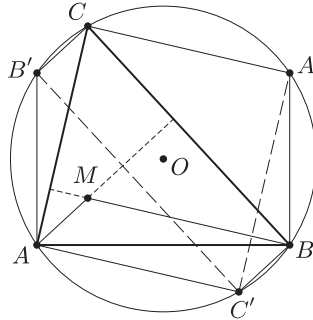


I. megoldás. A középpontos tükrözés tulajdonságaiból adódóan az $AC'A'C$, $ABA'B'$ és a $BCB'C'$ négyszögek téglalapok, hiszen átlóik egyenlő hosszúak és felezik egymást.

Jelölje M a háromszög magasságpontját. Ekkor BM párhuzamos AC' -vel, mivel mindkettő derékszöget zár be AC -vel. Hasonlóan AM párhuzamos $C'B$ -vel. Így az $AMBC'$ négyszög paralelogramma. Ennek átlója AB , ami felezi a területét, így AMB területe egyenlő ABC' területével. Hasonlóan belátható, hogy ACB' területe egyenlő ACM területével, és BCA' területe egyenlő BCM területével. Tehát az $A'BC$, $AB'C$, ABC' háromszögek területének összege egyenlő a BCM , az ACM és az AMB háromszögek területének összegével, ami éppen az eredeti ABC háromszög területe.



II. megoldás. Az AOC , BOC és AOB egyenlő szárú háromszögekben (a kerületi és középponti szögek tétele szerint, az ábrán láthatóan):

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ - 2\gamma,$$

$$2\alpha + 2\gamma = 180^\circ - 2\beta,$$

$$2\gamma + 2\beta = 180^\circ - 2\alpha.$$

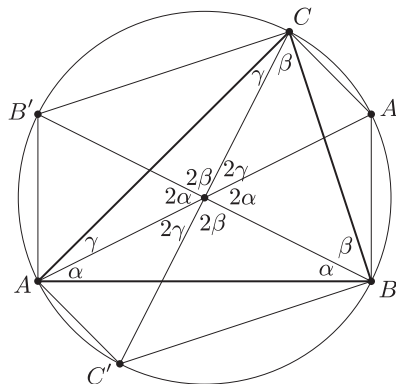
Írjuk föl az ABC háromszög területét $T_{ABC\Delta} = T_{AOC\Delta} + T_{COB\Delta} + T_{BOA\Delta}$ alakban. Itt (a $T_{\Delta} = \frac{xy \sin \delta}{2}$ képletet felhasználva):

$$\begin{aligned} T_{ABC\Delta} &= \frac{r^2 \sin(180^\circ - 2\gamma)}{2} + \frac{r^2 \sin(180^\circ - 2\beta)}{2} + \frac{r^2 \sin(180^\circ - 2\alpha)}{2} = \\ &= \frac{r^2 \sin 2\gamma}{2} + \frac{r^2 \sin 2\beta}{2} + \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2}. \end{aligned}$$

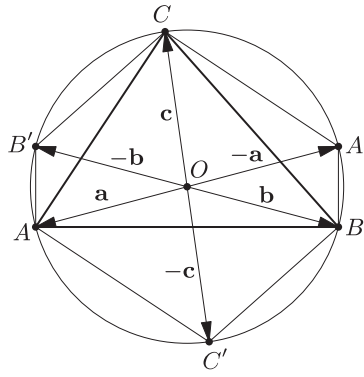
Hasonlóan az $AB'CA'BC'$ hatszög területe:

$$\begin{aligned} T_{AB'CA'BC'} &= T_{AOB'} + T_{B'OC} + T_{COA'} + T_{A'OB} + T_{BOC'} + T_{C'OA} = \\ &= 2 \frac{r^2 \sin 2\alpha}{2} + 2 \frac{r^2 \sin 2\beta}{2} + 2 \frac{r^2 \sin 2\gamma}{2}, \end{aligned}$$

ami éppen a kétszerese a $T_{ABC\Delta}$ -nek. Ez éppen azt jelenti, hogy az $A'BC$, $AB'C$ és ABC' háromszögek területének összege egyenlő az ABC háromszög területével.



III. megoldás. Jelölje a háromszög körülírt körének középpontjából az A , B , C pontokba mutató vektorokat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. A tükrözés miatt az A' , B' , C' pontok helyvektorai ekkor $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$ és $-\mathbf{c}$.



Egy háromszög területe fele akkora, mint két, egy csúcsból induló oldalvektora vektoriális szorzatának a hossza. Írjuk föl ezzel a szóban forgó háromszögek területét; mivel valamennyi helyvektor a síkban van, vektoriális szorzatuk a síkra merőleges, és a szorzás megfelelő sorrendje esetén egymással azonos állású. Így megtehetjük, hogy hosszuk helyett magukkal a (vektoriális szorzként kapott) vektorokkal számolunk:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad T_{ABC\Delta} &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c}), \\
 T_{ABC'\Delta} &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{C'A} \times \overrightarrow{C'B} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \\
 T_{AB'C\Delta} &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B'C} \times \overrightarrow{B'A} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}), \\
 T_{A'BC\Delta} &= \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A'B} \times \overrightarrow{A'C} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a}).
 \end{aligned}$$

A három külső háromszög területének összege:

$$\sum T' = \frac{1}{2} \cdot ((\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})).$$

Felbontva a zárójeleket, és kihasználva, hogy $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$, valamint $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$, azt kapjuk, hogy

$$\sum T' = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Felbontva (1)-ben a zárójeleket

$$T_{ABC\Delta} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{c} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

A két terület valóban megegyezik.