

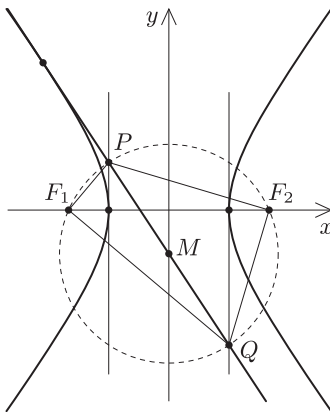
Megoldás. Alkalmas derékszögű koordináta-rendszerben a hiperbola egyenlete

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ekkor a fókuszpontok $F_1(-\sqrt{a^2+b^2}; 0)$ és $F_2(\sqrt{a^2+b^2}; 0)$, a valós tengely végpontjai $(-a; 0)$ és $(a; 0)$, az ezen pontokban a tengelyre állított merőlegesek egyenlete pedig $x = -a$, illetve $x = a$. Legyen a szóban forgó érintő egyenlete $Ax + By = C$. Ekkor az érintés miatt $a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$ (ekkor van a két egyenletnek egy megoldása), a metszéspontok pedig

$$P\left(-a; \frac{C + aA}{B}\right), \quad Q\left(a; \frac{C - aA}{B}\right),$$

ahonnan a PQ szakasz felezőpontja $M\left(0; \frac{C}{B}\right)$.



Thalész tétele értelmében elegendő azt belátni, hogy a két fókuszpont a PQ átmérőjű körvonalra esik, vagyis hogy $MP = MQ = MF_1 = MF_2$. Itt

$$MP^2 = MQ^2 = a^2 + \left(\frac{aA}{B}\right)^2 \quad \text{és} \quad MF_1^2 = MF_2^2 = (a^2 + b^2) + \left(\frac{C}{B}\right)^2,$$

vagyis a bizonyítandó állítás ekvivalens az

$$a^2 + \frac{a^2A^2}{B^2} = a^2 + b^2 + \frac{C^2}{B^2}$$

egyenlőséggel, amit viszont szorzás és rendezés után a már látott $a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$ alakra hozhatunk.