

I. megoldás. A feltétel szerint (x és y pozitív) az egyenlőtlenség két oldalán pozitív számok állnak, így elegendő a négyzetre emeléssel kapott egyenlőtlenséget bizonyítani. Ez a következő:

$$\frac{x^4 + y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3}{9} \leq \frac{x^2 + 2xy + y^2}{4} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

A műveleteket elvégezve és rendezve:

$$8x^4 + 8y^4 + 24x^2y^2 + 16xy^3 + 16x^3y \leq 9x^4 + 18x^3y + 18x^2y^2 + 18xy^3 + 9y^4,$$

$$0 \leq x^4 + 2x^3y - 6x^2y^2 + 2xy^3 + y^4.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon $(x^2 - y^2)^2 + 2xy(x - y)^2$ áll. A két négyzet nem negatív, xy a feltétel miatt pozitív, így a bizonyítandó állítás igaz. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x = y$.

Megjegyzések 1. A négyzetre emelést másképpen rendezve a

$$6x^2y^2 \leq x^4 + 2x^3y + 2xy^3 + y^4$$

egyenlőtlenség a következőképpen is igazolható. A jobb oldalon hat szám összege áll, ezek mértani közepe

$$\sqrt[6]{x^4x^3yx^3yxy^3y^4} = \sqrt[6]{x^{12}y^{12}} = x^2y^2,$$

tehát a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből következik a bizonyítandó állítás.

2. Ha a két oldalt $y^2 > 0$ -val osztjuk, akkor a $t = \frac{x}{y}$ változót bevezetve az egyváltozós

$$\frac{t^2 + t + 1}{3} \leq \frac{t + 1}{2} \cdot \sqrt{\frac{t^2 + 1}{2}}, \quad t > 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ennek igazolása történhet a megoldáshoz hasonló módon, a négyzetre emelés és a műveletek elvégzése után adódó $0 \leq t^4 + 2t^3 - 6t^2 + 2t + 1$ egyenlőtlenség jobb oldalán adódó polinom szorzattá alakításával, de a differenciálszámítás eszközeivel is.

3. Bár a bizonyítás elég egyszerű, a kapott egyenlőtlenség meglehetősen finom. Ha ugyanis a jobb oldalon a négyzetes közepet a nála nem nagyobb számtani középpel helyettesítjük, akkor az egyenlőtlenség iránya megfordul, azaz

$$(1) \quad \frac{x + y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + xy + y^2}{3}}.$$

Ennek igazolása a fentiekhez hasonló módon is történhet, de ha felidézzük az áprilisi számunkban megjelent *Megjegyzés a logaritmikus középhez* c. cikkben olvasható tételt¹, amely elég általános körülmények között tisztázza az integrálközépnek nevezett

$$K_f(a, b) = f^{-1} \left(\frac{\int_a^b f(x) dx}{b - a} \right)$$

és az $A(a; b)$ számtani közép nagyságviszonyát, akkor (1) jobb oldalán felismerhető a növekvő és konvex $f(t) = t^2$ függvény $[x; y]$ intervallumon vett integrálközepe, az (1) egyenlőtlenség pedig a tétel állítása. Az eredeti állítás is megkapható ilyen módon és így egy újabb – bár természetesen talán nem nevezhető – bizonyításhoz jutunk. (Fény derül viszont a feladat eredetére.)

II. megoldás. Az $f(t) = \sqrt{t}$ függvény az értelmezési tartományán növekvő és konkáv, így a fenti tétel szerint $K_f(a; b) \leq A(a; b)$, azaz

$$\left(\frac{\int_a^b \sqrt{t} dt}{b - a} \right)^2 \leq \frac{a + b}{2}.$$

Az integrál értéke:

$$\frac{2}{3} \left[t^{\frac{3}{2}} \right]_a^b = \frac{2}{3} \left(b^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}} \right).$$

Mivel a és b pozitívak, elvégezhetjük az $a = x^2$, $b = y^2$ helyettesítéseket. Ekkor az integrálközép négyzetgyöke:

$$K = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2} = \frac{x^2 + xy + y^2}{3} \cdot \frac{2}{x + y} \leq \sqrt{A(x^2; y^2)} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}},$$

ahonnan a bizonyítandó állítást kapjuk, ha x és y számtani közepével szorzunk.

¹**Tétel.** Ha f pozitív, növekvő és konkáv vagy fogyó és konvex, akkor $K_f(a, b) \leq A(a, b)$. (Ugyanígy ha f növekvő és konvex vagy fogyó és konkáv, akkor a fenti egyenlőtlenség fordítva teljesül: $A(a, b) \leq K_f(a, b)$.)