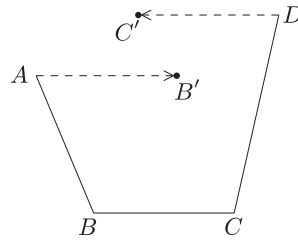


I. megoldás. Legyenek a négyszög csúcsai pozitív körüljárás szerint A , B , C és D . A négyszög szögeinek az összege 360° , ezért van két szomszédos csúcsa, mondjuk B és C , hogy $\angle B + \angle C \geq 180^\circ$. Ha B' és C' ezek tükörképe a „közrefogó” AC , illetve BD átló felezőpontjára (1. ábra), akkor a B és C csúcsok megválasztása miatt az AB , BC és CD oldalegyenesek egyike sem választja el a B' , C' pontpárt és a négyszöget. A tükrözések miatt másfelől $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'D}$, ahonnan következik, hogy $AB'DC'$ paralelogramma.

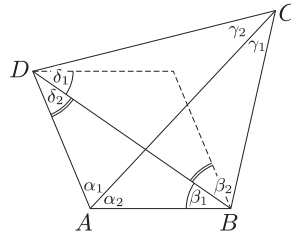


1. ábra

Ez azt jelenti, hogy B' és C' szimmetrikusan helyezkednek el az AD felezőpontjára, így egyiküket az AD nem választja el a B , C pontoktól: ez a tükörkép tehát nincs a négyszögön kívül.

II. megoldás. Használjuk az előző megoldás jelöléseit. Hívjuk a négyszög egy csúcsát *jónak*, ha megfelel a feladat követelményének. A négyszög konvex, az átlók tehát két részre osztják a négyszög szögeit. Legyenek ezek az 2. ábra szerint rendre α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2 , δ_1 , δ_2 .

A 2. ábráról leolvasható, hogy az A csúcs pontosan akkor jó, ha $\beta_1 \leq \delta_1$ és $\delta_2 \leq \beta_2$. Ez azt jelenti, hogy az átellenes A , C csúcsok *valamelyike* akkor és csak akkor jó, ha $0 \geq (\beta_1 - \delta_1)(\beta_2 - \delta_2) = s(A, C)$. Hasonlóan kapjuk, hogy a BD átlónak akkor és csak akkor van jó végpontja, ha $0 \geq (\alpha_1 - \gamma_1)(\alpha_2 - \gamma_2) = s(B, D)$.



2. ábra

$\alpha_1 + \delta_2 = \beta_2 + \gamma_1$, mert a 180° -ra kiegészítő szögük egyenlő. Átrendezve $\alpha_1 - \gamma_1 = \beta_2 - \delta_2$. Hasonlóan kapjuk, hogy $\alpha_2 - \gamma_2 = \delta_1 - \beta_1$. Ez azt jelenti, hogy minden konvex négyszögben $s(A, C) + s(B, D) = 0$, a fenti összegnek tehát van nempozitív tagja, és így a megfelelő átlónak van jó végpontja. A fentiekből az is kiderül, hogy egy általános négyszögben pontosan egy jó csúcs van. Ha a négyszög trapéz, akkor az egyik átló mindkét végpontja jó, egy paralelogrammának pedig mind a négy csúcsa ilyen.