

I. megoldás. Ha az E pont az AB szakaszon helyezkedik el, akkor $AC = DB = AB$, vagyis a kifejezés értéke $AB(AE + BE) = AB^2$. Ha E nincs az AB szakaszon, akkor legyen $\angle DAB = \alpha$ és $\angle CBA = \beta$. Thalész tétele szerint az ADB és ACB háromszögek derékszögűek. Ezért $AD = AB \cos \alpha$, $AC = AB \sin \beta$, $BC = AB \cos \beta$ és $BD = AB \sin \alpha$. Az AEB háromszög E -nél lévő külső szöge:

$$\begin{aligned} \angle DEA &= \angle CEB = \angle EAB + \angle EBA = \\ &= 90^\circ - \beta + 90^\circ - \alpha = 180^\circ - \alpha - \beta \end{aligned}$$

(1. ábra). Ezért az ADE és a BCE derékszögű háromszögekben:

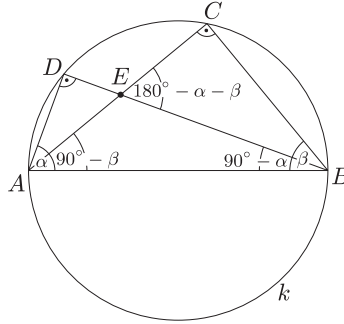
$$AE = \frac{AD}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{AD}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AB \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

és

$$BE = \frac{BC}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)} = \frac{BC}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{AB \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)}.$$

Tehát

$$\begin{aligned} AC \cdot AE + BD \cdot BE &= \frac{AB \sin \beta \cdot AB \cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{AB \sin \alpha \cdot AB \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{AB^2(\sin \beta \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} = AB^2. \end{aligned}$$



1. ábra

A feladatban szereplő kifejezés értéke tehát E helyzetétől függetlenül mindig AB^2 .

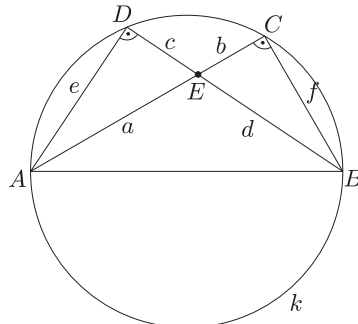
II. megoldás. Abban az esetben adunk újabb megoldást, ha E nincs az AB szakaszon. Használjuk a 2. ábra jelöléseit. Thalész tételéből következik, hogy az ADB , ADE , ACB és ECB háromszögek derékszögűek. Ezért Pitagorasz tétele teljesül rájuk. Ezt alkalmazva az első és a második, illetve a harmadik és a negyedik háromszögre:

$$AB^2 = e^2 + (c + d)^2 = a^2 - c^2 + (c^2 + d^2 + 2cd) = a^2 + d^2 + 2cd,$$

$$AB^2 = f^2 + (a + b)^2 = d^2 - b^2 + (a^2 + b^2 + 2ab) = d^2 + a^2 + 2ab.$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy:

$$2AB^2 = 2a^2 + 2d^2 + 2ab + 2cd = 2(a(a + b) + d(d + c)) = 2(AC \cdot AE + BD \cdot BE).$$



2. ábra

$AC \cdot AE + BD \cdot BE$ értéke tehát E helyzetétől függetlenül mindig megegyezik a kör átmérőjének négyzetével.

Megjegyzés. Könnyen igazolható, hogy a feladat állítása, tehát hogy $AC \cdot AE + BD \cdot BE = AB^2$ abban az esetben is teljesül, ha E a kör síkjának tetszőleges pontja.