

Megoldás. a) Az 5 dioptriás gyűjtőlencse fókusz távolsága

$$f = \frac{1}{D} = 0,2 \text{ m} = 20 \text{ cm}.$$

A leképezési törvény szerint

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}, \quad \text{azaz} \quad k = \frac{tf}{t-f},$$

ahol $t = 12 \text{ cm}$ a lencse és a pénzérme (tárgy) távolsága. A képtávolság tehát

$$k = \frac{12 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{-8 \text{ cm}} = -30 \text{ cm},$$

vagyis a kép a szemünktől $10 \text{ cm} + 30 \text{ cm} = 40 \text{ cm}$ távolságra keletkezik, és a mérete a tárgy méretének $\left| \frac{k}{t} \right|$ -szerese, vagyis 2,5-szerese.

b) A retinán keletkező képnek az eredeti tárgymérethez viszonyított arányát (vagyis a nagyítást, illetve kicsinyítést) a kép és a tárgy távolságának az aránya, valamint a tárgy mérete határozza meg:

$$\frac{K'}{T'} = \frac{k'}{t'},$$

ahol a vessző a szemre vonatkoztatott adatokat jelöli. Mivel k' (a szemlencse és a retina távolsága) a szem felépítése miatt mindig ugyanakkora, a retinán keletkező kép mérete csak a tárgyméret és a tárgytávolság arányától, a tárgy ún. *látószögétől* függ:

$$K' = \frac{k'}{t'} T' \sim \frac{T'}{t'}.$$

Ha lencse nélkül nézzük az érmét, akkor a tárgytávolság 22 cm , a tárgy mérete pedig valamekkora T , a retinán keletkező kép mérete tehát

$$K_1' \sim \frac{T}{22 \text{ cm}}.$$

A lencsén keresztül nézve olyan képet látunk, mintha a tárgy (az érme) 40 cm -re lenne a szemünktől, a mérete pedig $2,5 T$ lenne; ilyenkor a retinán keletkező kép mérete

$$K_2' \sim \frac{2,5 T}{40 \text{ cm}}.$$

A szemünk által érzékelt nagyítások aránya ezek szerint

$$\frac{K_2'}{K_1'} = 2,5 \frac{22}{40} = 1,375 \approx 1,4.$$

c) Helyezzük most a lencsét a korábbi 10 cm helyett $x < 22 \text{ cm}$ távolságra a szemünktől. Ekkor a lencse és a pénz távolsága $t = 22 - x$ lesz. (A továbbiakban valamennyi hosszúságot centiméter egységben számoljuk, de a mértékegységet nem írjuk ki.) Feltételezhetjük, hogy $t < f = 20$, vagyis $x > 2$; ekkor a lencse a szemünkkel ellentétes oldalon virtuális képet alkot a pénzről. A T méretű érme képének nagysága

$$T' = T \cdot \left| \frac{f}{t-f} \right| = T \cdot \frac{20}{x-2}$$

lesz, a lencsétől mért távolsága pedig

$$|k| = \left| \frac{tf}{t-f} \right| = \frac{(22-x) \cdot 20}{x-2}.$$

Ez a kép a szemünktől

$$t' = |k| + x = \frac{(22-x) \cdot 20}{x-2} + x = \frac{x^2 - 22x + 440}{x-2}$$

távolságban található, a retinán keletkező kép nagyságát meghatározó látószöge tehát

$$\frac{T'}{t'} = \frac{20 T}{x^2 - 22x + 440} = \frac{20 T}{(x-11)^2 + 319}.$$

Ez a kifejezés akkor a legnagyobb, amikor a nevezője a legkisebb, vagyis amikor $x = 11 \text{ cm}$.

A pénzérmét tehát akkor látjuk a legnagyobbban, amikor a lencsét éppen a szemünk és az érme közötti távolság felezőpontjánál tartjuk.

Megjegyzés. Érdekes, hogy a c) kérdésre kapott megoldás független a lencse fókusz távolságától, és akkor is érvényben marad, amikor a lencsét 2 cm -nél közelebb tartjuk a szemünkhöz. Igaz ugyan, hogy ekkor a lencse önmagában valódi képet alkotna a hátunk mögött, ezt a képet azonban a szemünk (mint egy virtuális tárgyat) bizonyos esetekben (nem túl kicsi tárgytávolság esetén) le tudja képezni a retinára. Ehhez arra van szükség, hogy a szemünk egész leképező rendszerének fókusz távolsága nagyobb legyen (tehát a szemünk kevésbé fókuszáljon), mint amikor egy nagyon távoli tárgyat nézünk.