

I. megoldás. Jelöljük az ütközés előtti sebességvektorokat $\mathbf{v}_1$ -gyel és $\mathbf{v}_2$ -vel, az ütközés utáni sebességvektorokat pedig $\mathbf{v}'_1$ -vel és $\mathbf{v}'_2$ -vel, a héliumatomok tömegét pedig m -mel! A feladat szövege szerint $|\mathbf{v}_1| = v_1 = 800$ m/s és $|\mathbf{v}_2| = v_2 = 600$ m/s.

A rugalmas ütközés során megmarad az ütköző molekulák összimpulzusa és összenergiája:

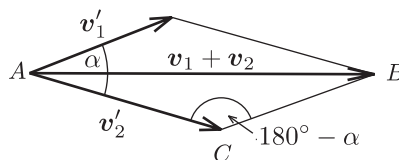
$$m\mathbf{v}_1 + m\mathbf{v}_2 = m\mathbf{v}'_1 + m\mathbf{v}'_2,$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2,$$

azaz

$$(1) \quad \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2,$$

$$(2) \quad v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2.$$



Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletet az *ábrán* látható vektorösszeggel is szemléltethetjük. Tudjuk, hogy az ütközés előtti sebességek azonos irányúak, emiatt fennáll:

$$|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2|^2 = (v_1 + v_2)^2.$$

Írjuk most fel az ABC háromszögre a koszinusz-tételt:

$$(3) \quad v_1'^2 + v_2'^2 - 2v_1'v_2' \cos(180^\circ - \alpha) = (v_1 + v_2)^2,$$

ahonnan az ütközés utáni sebességvektorok keresett α szögének koszinusza kifejezhető:

$$(4) \quad \cos \alpha = \frac{[v_1^2 + v_2^2 - v_1'^2 - v_2'^2] + 2v_1v_2}{2v_1'v_2'}.$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés (2) miatt nulla, így (4) a következő egyszerű alakba írható:

$$(5) \quad \cos \alpha = \frac{v_1v_2}{v_1'v_2'}.$$

Alkalmazzuk a mértani- és a négyzetes közepekre vonatkozó

$$v_1'v_2' \leq \frac{v_1'^2 + v_2'^2}{2}$$

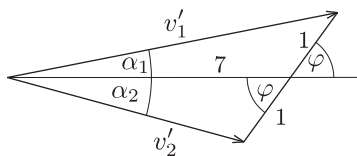
egyenlőtlenséget, amely $(v_1' - v_2')^2 \geq 0$ nyilvánvaló következménye! Ennek segítségével és (2) kihasználásával (5) így alakul:

$$\cos \alpha \geq \frac{2v_1v_2}{v_1'^2 + v_2'^2} = \frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{2 \cdot 800 \cdot 600}{800^2 + 600^2} = 0,96,$$

ahonnan $\alpha \leq 16,26^\circ$. A héliumatomok ütközés utáni sebessége tehát legfeljebb ekkora szöget zárhat be egymással, és az egyenlőség akkor áll fenn, amikor $v_1' = v_2'$.

II. megoldás. Vizsgáljuk a folyamatot a $\frac{v_1 + v_2}{2} = 700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel mozgó tömegközépponti rendszerből! Innen nézve a két atom ugyanakkora, $100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú, de ellentétes irányú sebességgel közeledik egymáshoz. Az ütközés után is egymással ellentétes irányban, változatlan nagyságú sebességgel kell mozogjanak, csak így teljesülhet az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás törvénye.

Az eredeti koordináta-rendszerbe úgy térhetünk vissza, ha a tömegközépponti rendszerbeli sebességekhez hozzáadjuk a tömegközéppont $700 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ nagyságú sebességét (lásd az *ábrát*, melyet az áttekinthetőség kedvéért 100-szorosan lecsökkentett sebességnagyságokkal rajzoltunk fel).



A feladat hátralévő részében azt vizsgáljuk, hogy φ függvényében milyen értékeket vehet fel az $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ szög. Számítsuk ki $\text{tg } \alpha$ -t az addíciós tétel felhasználásával:

$$\text{tg } \alpha = \text{tg } (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\text{tg } \alpha_1 + \text{tg } \alpha_2}{1 - \text{tg } \alpha_1 \text{tg } \alpha_2} = \frac{\frac{\sin \varphi}{7 + \cos \varphi} + \frac{\sin \varphi}{7 - \cos \varphi}}{1 - \frac{\sin \varphi}{7 + \cos \varphi} \frac{\sin \varphi}{7 - \cos \varphi}} = \frac{7}{24} \sin \varphi.$$

Látható, hogy a $0 \leq \varphi \leq 180^\circ$ értelmezési tartományban $0 \leq \text{tg } \alpha \leq \frac{7}{24}$, vagyis $0 \leq \alpha \leq 16,26^\circ$. Az ütközés utáni sebességvektorok szöge akkor maximális, amikor $\varphi = 90^\circ$, ilyenkor $v'_1 = v'_2$.