I. megoldás. A megoldást a $[0;2\pi)$ intervallumon keresve világos, hogy $x \neq 0$, így $\frac{x}{2} \neq 0, \pi$, azaz $\sin\frac{x}{2} \neq 0$. Az egyenlet ezért ekvivalens a

$$2\cos 5x \sin\frac{x}{2} + 2\cos 4x \sin\frac{x}{2} + 2\cos 3x \sin\frac{x}{2} + 2\cos 2x \sin\frac{x}{2} +$$

$$+ 2\cos x \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = 0 \qquad (x \neq 0)$$

egyenlettel. Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát a tetszőleges k (egész) számra érvényes (a szinusz függvény addíciós képletéből következő)

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha = 2\cos k\alpha \sin\frac{\alpha}{2}$$

azonosság felhasználásával az $\alpha = x$, $k = 1,2,3,4,5$ szereposztásban:

$$\left(\sin\left(5+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(5-\frac{1}{2}\right)x\right) + \left(\sin\left(4+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(4-\frac{1}{2}\right)x\right) +$$

$$+ \left(\sin\left(3+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(3-\frac{1}{2}\right)x\right) + \left(\sin\left(2+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(2-\frac{1}{2}\right)x\right) +$$

$$+ \left(\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x - \sin\left(1-\frac{1}{2}\right)x\right) + \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{11}{2}x = 0\,.$$

A $\sin\frac{11}{2}x = 0$ egyenlet nemnulla megoldásait keressük tehát $[0;2\pi)$-ben: $\frac{11}{2}x = \pi t$, $x = \frac{2t\pi}{11} = \frac{2\pi}{11}, \frac{4\pi}{11}, \frac{6\pi}{11}, \frac{8\pi}{11}, \frac{10\pi}{11}, \frac{12\pi}{11}, \frac{14\pi}{11}, \frac{16\pi}{11}, \frac{18\pi}{11}, \frac{20\pi}{11}$.

II. megoldás. Az $\varepsilon = \cos x + i\sin x$ komplex szám k-adik hatványa tetszőleges k egészre a Moivre-képlet szerint $\varepsilon^k = \cos kx + i\sin kx$; továbbá $(\cos kx + i\sin kx) + \big(\cos(-kx) + i\sin(-kx)\big) = 2\cos kx$. Egyenletünk bal oldala ezek szerint az

$$S = \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} + 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^5$$

összegnek a valós része; ez maga az S, mivel S képzetes része a szinusz függvény páratlansága miatt nulla. A mértani sorozat összegképlete szerint:

$$S = \frac{\varepsilon^6 - \varepsilon^{-5}}{\varepsilon - 1}\,,$$

így a feladat egyenlete egyenértékű az $\varepsilon^6 = \varepsilon^{-5}$, $\varepsilon \neq 1$, illetve az $\varepsilon^{11} = 1 \neq \varepsilon$ egyenlettel. Ennek megoldásai:

$$\varepsilon = \cos\frac{2t\pi}{11} + i\sin\frac{2t\pi}{11}, \quad \text{azaz} \quad x = \frac{2t\pi}{11}, \quad t = 1,2,\ldots,10.$$

III. megoldás. Először megmutatjuk, hogy $x = \frac{2\pi}{11}$ megoldása az egyenletnek. Vegyünk fel a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben egy szabályos 11-szöget, melynek középpontja az origó, csúcsai pedig pozitív körüljárás szerint $A_0, A_1, \ldots, A_{10}$, ahol A_0 az $(1;0)$ pont. Ekkor A_k első koordinátája éppen $\cos\frac{2k\pi}{11}$ lesz, vagyis az A_i pontok első koordinátáinak összege éppen

$$2\cos 5x + 2\cos 4x + 2\cos 3x + 2\cos 2x + 2\cos x + 1.$$

Az O körüli $\frac{2\pi}{11}$ szögű elforgatás az $\overrightarrow{OA_i}$ vektorok mindegyikét a rákövetkezőbe viszi, ezért a vektorok összege 0, amiért is az A_i pontok első koordinátáinak összege is 0. Ugyanez a gondolatmenet azt is kiadja, hogy minden $1 \leq k \leq 10$ esetén $x = \frac{2k\pi}{11}$ megoldása lesz az egyenletnek. Természetesen minden megoldáshoz 2π egész számú többszörösét hozzáadva újabb megoldásokat kapunk, vagyis minden olyan k egész számra, amely 11-gyel nem osztható, $x = \frac{2k\pi}{11}$ megoldása lesz az egyenletnek. Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs.

Az addíciós képletek ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1, \quad \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$$

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

és

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x.$$

Ezért x pontosan akkor megoldása az egyenletnek, ha $a = \cos x$ gyöke a

$$32a^5 + 16a^4 - 32a^3 - 12a^2 + 4a + 1 = 0$$

egyenletnek. A fent elmondottak miatt az

$$a_1 = \cos\frac{2\pi}{11}, \quad a_2 = \cos\frac{4\pi}{11}, \quad a_3 = \cos\frac{6\pi}{11}, \quad a_4 = \cos\frac{8\pi}{11}, \quad a_5 = \cos\frac{10\pi}{11}$$

számok az egyenletet kielégítik. Mivel ez öt különböző valós szám, a szóban forgó ötödfokú egyenletnek más megoldása már nem lehet. Mivel a fent felsorolt szögek éppen azok, amelyeknek koszinusza valamelyik a_i-vel egyenlő, az eredeti egyenletnek valóban megadtuk már az összes megoldását.