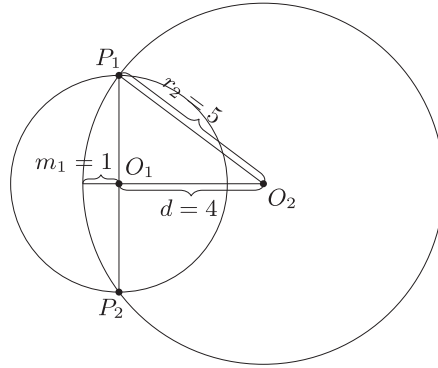


I. megoldás. Tekintsünk egy, a két gömb középpontján átmenő tetszőleges síkmetszetet. Jelölje a síkmetszetben látható két kör középpontját O_1 és O_2 , metszéspontjait pedig P_1 és P_2 .



$P_1O_1O_2 \sphericalangle = 90^\circ$, hiszen a $P_1O_1O_2$ háromszög oldalai Pitagoraszai számhármast alkotnak, és a kérdéses szög a háromszög átfogójával van szemben.

Jelölje O_1O_2 és P_1P_2 metszéspontját M . Tudjuk, hogy két kör metszéspontjait összekötő egyenes merőleges a két középpontot összekötő szakaszra, vagyis $P_1MO_2 \sphericalangle = 90^\circ$.

A fentiekből következik, hogy $M = O_1$, vagyis O_1 illeszkedik a P_1P_2 szakaszra.

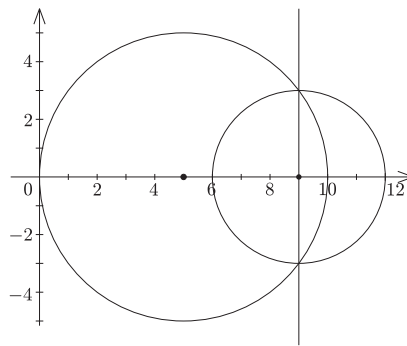
Visszatérve a térbe: a két gömb közös része két gömbszeletből áll (melyeket egy O_1 középpontú, O_1O_2 -re merőleges síkban levő körlap választ el), ezek közül az egyik a kisebbik gömb felével egyenlő. Ez utóbbi gömbszelet térfogata V_1 , a másik térfogata V_2 . A gömbszelet magassága legyen m_1 , ennek értéke: $m_1 = 5 - 4 = 1$. A gömb, illetve gömbszelet térfogatának képletét felhasználva:

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot 3^3 \pi = 18\pi,$$

$$V_2 = 5 \cdot 1^2 \cdot \pi - \frac{1^3 \pi}{3} = \frac{14}{3} \pi.$$

A két gömb közös részének térfogata $V_1 + V_2 = \frac{68}{3} \pi \approx 71,21$.

II. megoldás. A két gömb középpontján átmenő síkkal elmetsszük a két gömböt. A síkmetszet egy 3 és egy 5 sugarú kör lesz, a két kör középpontjának távolsága 4.



Helyezzük el a két kört egy koordináta-rendszerben úgy, hogy a középpontjuk illeszkedjen az x tengelyre, és a nagyobbik kör érintse az y tengelyt. Ekkor a két kör egyenlete:

$$(x - 9)^2 + y^2 - 9 = 0,$$

$$(x - 5)^2 + y^2 - 25 = 0.$$

A két kör metszéspontjainak koordinátáit ki tudjuk számolni, ha a két egyenlet bal oldalát egyenlővé tesszük: $x^2 - 18x + 72 = x^2 - 10x$, ahonnan $x = 9$ és $y = \pm 3$.

A keresett testet két részre bontjuk és a térfogatot integrálással számoljuk ki. Az egyik rész a kisebb, a másik a nagyobb sugarú kör x tengely körüli forgatásával keletkezik. A kisebb kör esetén $f_1^2(x) = -x^2 + 18x - 72$, a nagyobbik

kör esetén pedig $f_2^2(x) = -x^2 + 10$. Ezek alapján:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_6^9 f_1^2(x) dx = \pi \int_6^9 (-x^2 + 18x - 72) dx = \pi \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{18x^2}{2} - 72x \right]_6^9 = \\ &= \pi \left(\frac{-9^3}{3} + \frac{18 \cdot 9^2}{2} - 72 \cdot 9 - \frac{-6^3}{3} - \frac{18 \cdot 6^2}{2} + 72 \cdot 6 \right) = 18\pi. \\ V_2 &= \pi \int_9^{10} f_2^2(x) dx = \pi \int_9^{10} (-x^2 + 10) dx = \pi \left[\frac{-x^3}{3} + \frac{10x^2}{2} \right]_9^{10} = \\ &= \pi \left(\frac{-10^3}{3} + \frac{10 \cdot 10^2}{2} - \frac{-9^3}{3} - \frac{10 \cdot 9^2}{2} \right) = 4\frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

A két térfogat összege: $V_1 + V_2 = \frac{68}{3}\pi$.