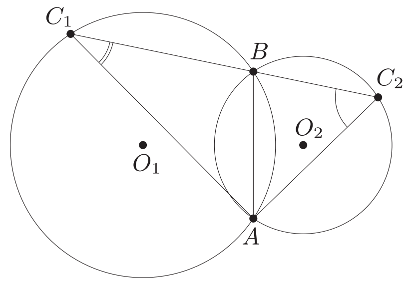
Megoldás. Először lássunk be egy segédtételt:

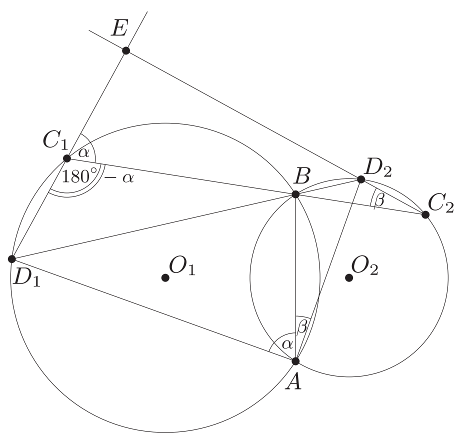
Két metsző kör egyik metszéspontján átmenő tetszőleges egyenesnek a körökön belül fekvő darabja a másik metszéspontból mindig egyenlő (az egyenes irányától független) szögben látszik.

Az *1. ábrán* az egy és a két ívvel jelölt szögek a szelő tetszőleges helyzete esetében ugyanakkorák, mivel ugyanazon ívhez tartozó kerületi szögek, így a háromszög harmadik szöge is állandó.



1. ábra

A *2. ábra* szerint jelöljük a két kör közös húrjának végpontjait A-val és B-vel, a C_1D_1 és C_2D_2 egyenesek metszéspontját E-vel.



2. ábra

Először tegyük fel, hogy C_1D_1 merőleges C_2D_2-re.

Ekkor az $EC_1C_2\sphericalangle = \alpha$ és $C_1C_2E\sphericalangle = \beta$ jelöléseket bevezetve az EC_1C_2 derékszögű háromszögben $\alpha + \beta = 90^\circ$. Nyilván $BC_1D_1\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$ és az ABC_1D_1 húrnégyszögben

$$D_1AB\sphericalangle = 180^\circ - BC_1D_1\sphericalangle = \alpha.$$

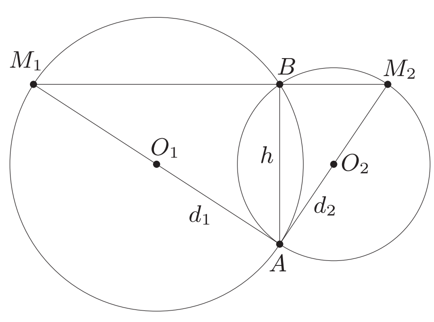
Másrészt $BAD_2\sphericalangle = BC_2D_2\sphericalangle = \beta$, hiszen azonos BD_2 ívhez tartozó kerületi szögek az O_2 középpontú körben.

Így

$$D_1AD_2\sphericalangle = D_1AB\sphericalangle + BAD_2\sphericalangle = \alpha + \beta = 90^\circ.$$

A segédtétel szerint bármely B ponton keresztül húzott szelőnek a két körbe eső darabja az A pontból derékszög alatt látszik.

Húzzuk meg ezen szelők közül azt, amelyik merőleges az AB húrra, és jelöljük a körökkel alkotott metszéspontokat M_1, M_2-vel (*3. ábra*).



3. ábra

Mivel a B pontból az AM_1 és AM_2 húrok $90°$-os szög alatt látszanak, a Thálesz-tétel miatt ezek átmérők a megfelelő körökben.

Az ABM_1 és ABM_2 derékszögű háromszögekre alkalmazva a Pitagorasz-tételt:

$$BM_1 = \sqrt{d_1^2 - h^2} \quad \text{és} \quad BM_2 = \sqrt{d_2^2 - h^2}.$$

Az M_1AM_2 derékszögű háromszögben a magasságtétel alapján:

$$\sqrt{d_1^2 - h^2} \cdot \sqrt{d_2^2 - h^2} = h^2.$$

Négyzetreemelés után: $(d_1^2 - h^2)(d_2^2 - h^2) = h^4$, amiből $d_1^2 d_2^2 = d_1^2 h^2 + d_2^2 h^2$, illetve osztva a $d_1^2 d_2^2 h^2 > 0$ mennyiséggel:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}.$$

Megfordítva az állítást, ha

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{d_1^2} + \frac{1}{d_2^2}$$

egyenlőség teljesül, a levezetést lépésről lépésre visszafele végrehajtva a $BA = \sqrt{BM_1 \cdot BM_2}$ összefüggés adódik, ami a magasságtétel megfordításaként azt jelenti, hogy $M_1AM_2\sphericalangle = 90°$.

A bizonyított segédtétel alapján így $D_1AD_2\sphericalangle = 90°$, illetve a korábbi levezetés alapján

$$90° = D_1AD_2\sphericalangle = D_1AB\sphericalangle + BAD_2\sphericalangle = EC_1C_2\sphericalangle + C_1C_2E\sphericalangle.$$

Így $C_2EC_1\sphericalangle = 180° - (EC_1C_2\sphericalangle + C_1C_2E\sphericalangle) = 90°$.