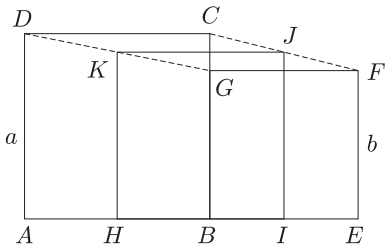
I. megoldás. Jelölje H, I, J és K az AB, BE, FC és GD szakaszok felezőpontját. A feladat szövege szerint:

$$AB = BC = CD = AD = a \quad \text{és} \quad BE = EF = FG = BG = b.$$



Felhasználjuk, hogy a trapéz középvonala (a trapéz szárainak felezőpontját összekötő szakasz) párhuzamos az alapokkal, hossza pedig az alapok összegének felével egyenlő.

Tudjuk, hogy $BG \parallel BC$, mert ez a négyzetek közös oldala, $AD \parallel BC \parallel BG \parallel EF$, mert ezek a megfelelő négyzetek szemköztes oldalai.

Ezért az $ABGD$ és az $EFCB$ négyszögek olyan trapézok, amelyekben az alapok $AD = BC = a$, $BG = EF = b$. Így a középvonalak hossza is egyenlő:

$$HK = IJ = \frac{a+b}{2}.$$

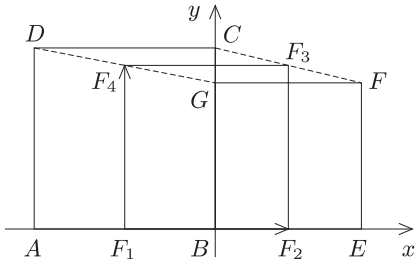
Mivel a trapézok középvonalai párhuzamosak az alapokkal, azért $KHI\sphericalangle = JIH\sphericalangle = 90°$. Hasonlóan $AE \parallel DC \parallel FG$ és $DC = a$, $FG = b$, így KJ egy olyan trapéz középvonala, amelynek alapjai a és b hosszúak. Tehát

$$KJ = \frac{a+b}{2}, \qquad KJ \parallel DC.$$

Ezért $JKH\sphericalangle = KJI\sphericalangle = 90°$.

Mivel a $HIJK$ négyszögben $HI = IJ = JK = KH$, és a négyszög szögei 90°-osak, ez a négyszög négyzet, melynek területe: $t = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.

II. megoldás. Helyezzük az *ábrát* abba a koordináta-rendszerbe, ahol az AE egyenes az x, a BC egyenes pedig az y tengely, így B az origó.



Az $ABCD$ négyzet a oldalú, így a csúcsok koordinátái: $A(-a;0)$, $B(0;0)$, $C(0;a)$, $D(-a;a)$, ahol $a > 0$.

A $BEFG$ négyzet b oldalú, így a csúcsok koordinátái: $B(0;0)$, $E(b;0)$, $F(b;b)$, $G(0;b)$, ahol $b > 0$.

Számoljuk ki a megfelelő felezőpontok koordinátáit.

Az AB felezőpontja: $F_1\left(-\frac{a}{2};0\right)$, a BE felezőpontja: $F_2\left(\frac{b}{2};0\right)$, az FC felezőpontja: $F_3\left(\frac{b}{2};\frac{a+b}{2}\right)$, a DG felezőpontja: $F_4\left(-\frac{a}{2};\frac{a+b}{2}\right)$. Ekkor:

$$F_1F_2 = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}-\frac{b}{2}\right)^2 + (0-0)^2} = \frac{a+b}{2}.$$

Hasonlóan számolható, hogy:

$$F_2F_3 = F_3F_4 = F_4F_1 = \frac{a+b}{2}.$$

Tehát az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög rombusz. A rombusz két oldalvektora:

$$\overrightarrow{F_1F_2}\left(\frac{a+b}{2};0\right), \qquad \overrightarrow{F_1F_4}\left(0;\frac{a+b}{2}\right).$$

Ekkor $\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \overrightarrow{F_1F_4} = 0$, vagyis e vektorok merőlegesek egymásra. Ezért az $F_1F_2F_3F_4$ négyszög négyzet, melynek oldalhossza $\frac{a+b}{2}$. Ezek alapján a kérdéses terület: $t = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$.