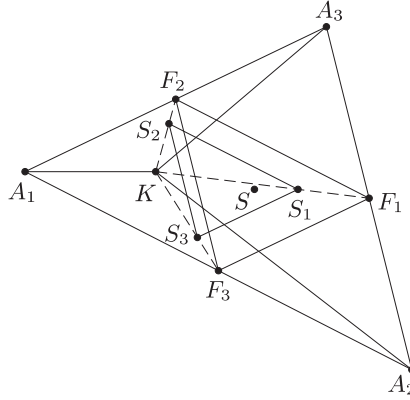


I. megoldás. Jelölje S az $A_1A_2A_3$ háromszög súlypontját, F_i pedig az A_jA_k oldal felezőpontját.



Mivel F_iF_j az $A_1A_2A_3\triangle$ középvonala, az F_iF_j párhuzamos A_iA_j -vel, és fele olyan hosszú. Emiatt az $A_1A_2A_3\triangle$ -et egy S középpontú, $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ arányú hasonlósági transzformáció az $F_1F_2F_3\triangle$ -be viszi.

Ugyanakkor $KS_i = 2S_iF_i$, és a K , S_i , F_i pontok egy egyenesbe esnek. Emiatt az $F_1F_2F_3\triangle$ -et egy K középpontú, $\lambda_2 = \frac{2}{3}$ arányú hasonlósági transzformáció az $S_1S_2S_3\triangle$ -be viszi. Így az $S_1S_2S_3$ háromszög oldalai párhuzamosak az $A_1A_2A_3$ háromszög megfelelő oldalaival, ezért az $A_1A_2A_3$ háromszöget egy ($\lambda_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ arányú) középpontos hasonlóság viszi át az $S_1S_2S_3$ háromszögbe, tehát a hasonlóság középpontján az A_iS_i szakaszok áthaladnak.

II. megoldás. F_1F_3 az $A_1A_2A_3\triangle$ középvonala, így $F_1F_3 = \frac{A_1A_3}{2}$ és a két szakasz párhuzamos. Tudjuk, hogy a súlypont a súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadolópontja. Ezek alapján a $KF_1F_3\triangle$ -ben a párhuzamos szelőszakaszok tételének megfordítása miatt:

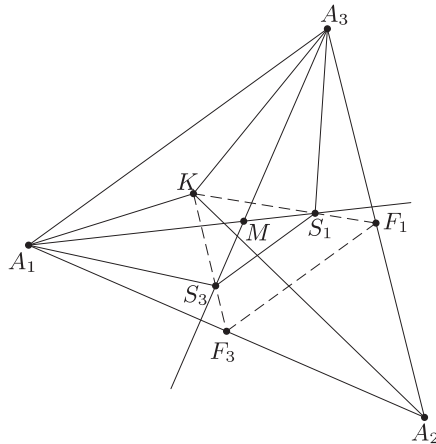
$$S_1S_3 = \frac{2}{3}F_1F_3 = \frac{2}{6}A_1A_3,$$

és $S_1S_3 \parallel F_1F_3$.

II. megoldás. Ezekből következik, hogy $A_1S_3S_1A_3$ trapéz, és alapjainak aránya

$$S_1S_3 : A_1A_3 = 1 : 3.$$

Tudjuk, hogy a trapéz átlói az alapok arányában osztják egymást, vagyis $S_3M : MA_3 = S_1M : MA_1 = 1 : 3$.



Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy $A_1S_2S_1A_2$ trapéz, és átlóinak metszéspontját N -nel jelölve $S_2N : NA_2 = S_1N : NA_1 = 1 : 3$.

Mivel $S_1M : MA_1 = S_1N : NA_1 = 1 : 3$, azért $M = N$, tehát a három szakasz valóban egy ponton halad át.

III. megoldás. Tekintsünk a síkon egy tetszőleges O pontot, és indítsunk vektorokat O -ból az A_i , S_i illetve K pontokba. A vektorokat jelöljük a megfelelő kisbetűkkel.

Mivel S_i a KA_jA_k háromszög súlypontja, a következőképpen írható fel vektorokkal:

$$\mathbf{s}_i = \frac{\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k + \mathbf{k}}{3}.$$

Tekintsük az $A_i S_i$ szakaszok S_i -hez közelebbi negyedelőpontját, melyet jelöljön P . A P pontba mutató vektor így írható fel:

$$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{a}_i + 3\mathbf{s}_i}{4} = \frac{\mathbf{a}_i + 3\left(\frac{\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k + \mathbf{k}}{3}\right)}{4} = \frac{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k + \mathbf{k}}{4}.$$

Ez független i választásától, tehát az $A_i S_i$ szakaszok S_i -hez közelebbi negyedelőpontja i mindhárom értékére P . A három egyenes valóban egy ponton megy át.

Megjegyzések. 1. A következő gondolatmenettel található ki, hogy a negyedelőpont lesz a közös metszéspont: Ha találunk olyan (p_i, q_i) , (p_j, q_j) , (p_k, q_k) számpárokat, melyekben a számok összege 1, és teljesül, hogy az $\mathbf{a}_i$, $\frac{\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k + \mathbf{k}}{3}$ vektorok p_i -vel és q_i -vel vett lineáris kombinációja megegyezik $\mathbf{a}_j$, $\frac{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_k + \mathbf{k}}{3}$ vektorok p_j -vel és q_j -vel vett lineáris kombinációjával, illetve az $\mathbf{a}_k$, $\frac{\mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j + \mathbf{k}}{3}$ vektorok p_k -val és q_k -val vett lineáris kombinációjával, akkor ez a közös lineáris kombináció mindhárom szakaszra illeszkedik. A $(p_i, q_i) = (p_j, q_j) = (p_k, q_k) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ számpárok megfelelőek, a közös lineáris kombináció a szakaszok negyedelőpontja.

2. Többen koordináta geometriával oldották meg a feladatot. Kiszámították például, hogy $A_1 S_1$ és $A_2 S_2$, illetve $A_1 S_1$ és $A_3 S_3$ metszéspontjának koordinátái megegyeznek.

IV. megoldás. A feladat megoldásához hívjuk segítségül a fizikát. Helyezzünk egységnyi, például 1 kg-os tömegű pontszerű testeket az A_1 , A_2 , A_3 , K pontokba. A rendszer helyettesíthető egy P -be, a rendszer tömegközéppontjába helyezett 4 kg-os testtel.

Tekintsük először az A_1 , A_2 , K pontokat. Ez a rendszer az egyenlő tömegek miatt egy S_3 -ba helyezett 3 kg-os testtel helyettesíthető. A rendszer és így az A_3 -ba és S_3 -ba helyezett testek tömegközéppontja P , és két test tömegközéppontja rajta van a pontok egyenesén, ezért P illeszkedik $A_3 S_3$ -ra. Hasonlóan láthatjuk be, hogy P illeszkedik $A_2 S_2$ -re és $A_1 S_1$ -re is. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. Még többet is beláthatunk ennek a modellnek a segítségével. Támasszuk alá az $A_3 S_3$ szakaszt. A rendszer pontosan akkor lesz egyensúlyban, ha a tömegközéppontjánál támasztottuk alá. Ekkor lesz a forgatónyomatékok eredője 0. Tehát $A_3 P \cdot 1 = P S_3 \cdot 3$, amiből $\frac{A_3 P}{P S_3} = 3$, tehát P negyedeli az $A_3 S_3$, és hasonlóan az $A_2 S_2$ és az $A_1 S_1$ szakaszt.