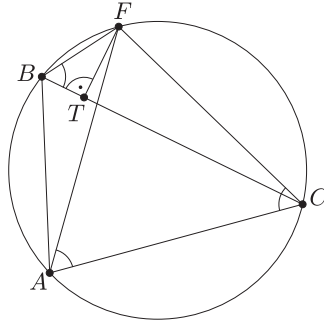


Megoldás. Mindegyik megoldásban azt az esetet vizsgáljuk, amikor $BC > AB$, és így $F \in \widehat{BC}$, tehát $T \in BC$. Ha pedig $BC = AB$, akkor $B = F$, T az AC felezőpontja, így az állítás triviális.

I. megoldás. Mivel F az $\widehat{ABC}$ ív felezőpontja, azért $\widehat{FA} = \widehat{FC}$, és így $FA = FC$. Ebből a kerületi szögek tétele miatt $\angle FAC = \angle FCA$, amit jelöljön α . Ebből következik, hogy $\angle AFC = 180^\circ - 2\alpha$.

Ismét a kerületi szögek tétele miatt $\angle FBC = \angle FAC = \alpha$, valamint $\angle ABC = \angle AFC = 180^\circ - 2\alpha$, így $\angle ABF = 180^\circ - \alpha$.



Az AFB háromszögben a koszinusz-tételt felírva kapjuk, hogy:

$$FA^2 = AB^2 + BF^2 - 2 \cdot AB \cdot BF \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

ahonnan $FC = FA$ miatt

$$(1) \quad FC^2 = AB^2 + BF^2 + 2 \cdot AB \cdot BF \cdot \cos \alpha.$$

A TBF derékszögű háromszögben $\cos \alpha = \frac{BT}{BF}$, és így

$$(2) \quad BF \cdot \cos \alpha = BT.$$

A TCF és a BTF derékszögű háromszögekben a Pitagorasz-tétel szerint

$$(3) \quad FC^2 = TC^2 + TF^2,$$

illetve

$$(4) \quad BF^2 = BT^2 + TF^2.$$

A (3), (4) és (2) egyenletek jobb oldalát (1)-ben a megfelelő helyre beírva kapjuk, hogy

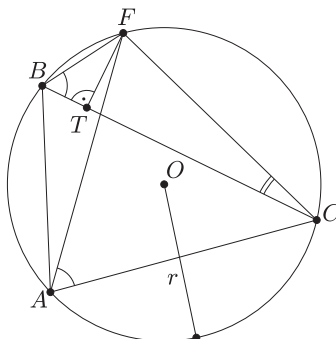
$$TC^2 + TF^2 = AB^2 + BT^2 + TF^2 + 2 \cdot AB \cdot BT,$$

ahonnan

$$TC^2 = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot BT + BT^2 = (AB + BT)^2,$$

és így valóban $TC = AB + BT$.

II. megoldás. Jelölje a körív sugarát r , a CBF szöget α , a BCF szöget pedig β .



A feladat feltétele, valamint a kerületi szögek tétele miatt $FBC\angle = FAC\angle = FCA\angle = \alpha$. Tudjuk még, hogy $BCA\angle = \alpha - \beta$. Ezek alapján:

$$FC = 2r \sin \alpha, \quad FB = 2r \sin \beta,$$

$$BA = 2r \sin (\alpha - \beta).$$

Ezt felhasználva a CTF derékszögű háromszögben

$$CT = FC \cdot \cos \beta = 2r \cdot \sin \alpha \cos \beta,$$

illetve a BTf derékszögű háromszögben

$$BT = FB \cdot \cos \alpha = 2r \cos \alpha \sin \beta.$$

Azt szeretnénk bebizonyítani, hogy $CT = \frac{CB + BA}{2}$. Mivel $BC = CT + TB$, ez az egyenlőség ekvivalens a következővel: $CT = TB + BA$. A három szakasz hosszára kapott kifejezéseket az egyenlőségbe behelyettesítve kapjuk, hogy:

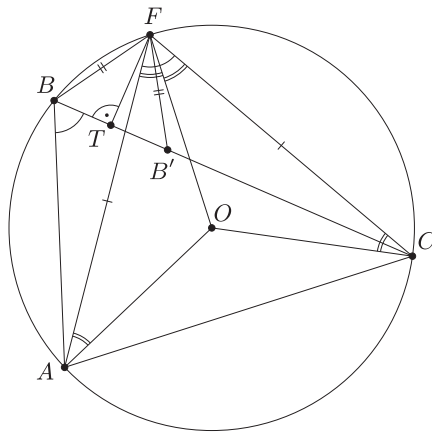
$$2r \sin \alpha \cos \beta = 2r \cos \alpha \sin \beta + 2r \sin (\alpha - \beta),$$

vagyis

$$\sin \alpha \cos \beta = \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta,$$

ami azonosság. Mivel a helyettesítés során is ekvivalens lépést végeztünk, ezzel bebizonyítottuk, hogy $CT = \frac{CB + BA}{2}$.

III. megoldás. A feladat szerint $\widehat{ABF} = \widehat{FC}$, ezért $AF = FC$. Az AOC szöget 2α -val jelölve a kerületi szögek tétele szerint $AFC\angle = ABC\angle = \alpha$. Az $ACF\triangle$ egyenlő szárú, ezért FO felezi az AFC szöget, azaz $AFO\angle = OFC\angle = \frac{\alpha}{2}$.



Tükrözzük a B pontot a T pontra, a kapott pont legyen B' . Ekkor a $BB'F\triangle$ egyenlő szárú, így $BF = B'F$ és $FBB'\angle = FB'B\angle$.

Azt kell bizonyítani, hogy $AB + BT = TB' + B'C$. A tükrözés miatt $BT = B'T$, ezért elég belátni, hogy $AB = B'C$.

Az ACO háromszög egyenlő szárú az $AO = OC$ miatt, így

$$OAC\angle = OCA\angle = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

Az FAO háromszög is egyenlő szárú, $FO = OA$, tehát

$$OFA\angle = FAO\angle = \frac{\alpha}{2}.$$

Innen

$$FAC\angle = FAO\angle + OAC\angle = 90^\circ - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

A kerületi szögek tétele és az eddigiek miatt:

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} = FAC\angle = FBC\angle = FBB'\angle = FB'B\angle,$$

és így

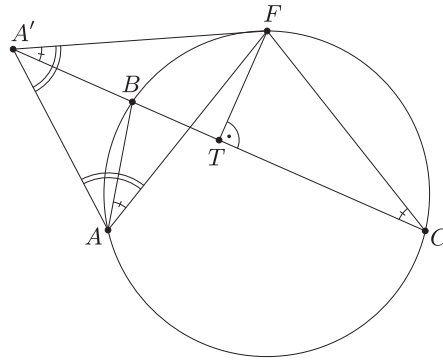
$$FB'C \sphericalangle = 180^\circ - FB'B \sphericalangle = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

$$ABF \sphericalangle = \alpha + \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $AF = CF$, $BF = B'F$ és $ABF \sphericalangle = FB'C \sphericalangle = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, a $B'CF$ és a BAF háromszögeknek megegyezik két oldala és a nagyobbikkal szemközi szöge, tehát a két háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy a harmadik oldaluk is egyenlő, vagyis $AB = B'C$.

Ezzel az állítást beláttuk.

IV. megoldás. Mivel F az AC körív felezőpontja, azért $FA = FC$. Forgassuk el F körül az A pontot úgy, hogy a kapott A' pont a BC szakasz által meghatározott egyenesre kerüljön. A forgatás távolságtartó, ezért $FA = FA'$. A két egyenlőséget egybevetve $FC = FA'$, tehát az $A'CF\Delta$ egyenlő szárú és $A'CF \sphericalangle = CA'F \sphericalangle$. Jelölje ezt a szöget α . A kerületi szögek tétele miatt $BAF \sphericalangle = BCF \sphericalangle = \alpha$. Az $AA'F\Delta$ egyenlő szárú, mert $FA = FA'$. A háromszögben $AA'F \sphericalangle = A'AF \sphericalangle$. Jelölje ezt a szöget β .



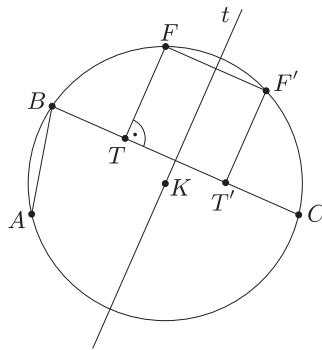
Ekkor $BA'A \sphericalangle = \beta - \alpha$, és $A'AB \sphericalangle = \beta - \alpha$, ezért az $ABA'\Delta$ egyenlő szárú és így $AB = A'B$. Ez azt jelenti, hogy a töröttvonal hossza $A'C$, mert $A'C = A'B + BC$, és $A'B = AB$.

Az $A'CF\Delta$ egyenlő szárú, tehát FT felezi az alapját, $A'C$ -t.

Ezzel beláttuk, hogy a T pont felezi a töröttvonal hosszát.

V. megoldás. Jelölje a BC szakasz felező merőlegesét t . Tükrözzük az F és a T pontot t -re, a tükörképek legyenek rendre F' és T' .

A $TT'F'F$ négyszög egy derékszögű, szimmetrikus trapéz, vagyis egy téglalap. Ebből következik, hogy $TT' = FF'$.



A tükrözés miatt $BT = CT'$ és $\widehat{BF} = \widehat{CF'}$. Mivel F az $\widehat{ABC}$ ív felezőpontja, $\widehat{AF} = \widehat{CF}$. Így $\widehat{AF} - \widehat{BF} = \widehat{CF} - \widehat{CF'}$, vagyis $\widehat{AB} = \widehat{FF'}$. Egy körben egyenlő hosszúságú ívekhez egyenlő hosszúságú húrok tartoznak, ezért $AB = FF'$.

A fentiek alapján $AB + BT = FF' + CT' = TT' + CT' = CT$, vagyis valóban egyenlőek a megfelelő szakaszok.

Megjegyzés. Ez a feladat már Eukleidész *Elemek* című művében is szerepelt.